



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Optični pojav parhelija: teorija, Monte Carlo simulacija in laboratorijski eksperiment

Diplomski seminar na študijskem programu 1. stopnje Fizika

Borislav Simonović

Mentor: izr. prof. dr. Marko Gosak

Maribor, 2024

SIMONOVIĆ, B.: Optični pojav parhelija: teorija, Monte Carlo simulacija in laboratorijski eksperiment

Diplomski seminar, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, 2024.

POVZETEK

V diplomskem seminarju preučujemo parhelij – to je vrsta halo pojava, ki nastane zaradi loma svetlobe na poti skozi ledene kristale v ozračju. Določimo, kako se svetloba lomi skozi značilne ploskve kristalov, odvisno od vpadnega kota. Dobljeno zvezo uporabimo za določitev oblike parhelija in njegovega položaja na nebu. Spreminjajočo se intenziteto svetlobe pojava simuliramo z metodo Monte Carlo, pri čemer kvadrat Fresnelovih koeficientov odbojnosti uporabimo kot verjetnost za odboj svetlobe na ploskvah kristalov. Rezultate simulacije primerjamo z laboratorijskim eksperimentom, pri katerem opazujemo lom svetlobe skozi model kristala. Izkaže se, da se teoretična napoved ne le dobro sklada z eksperimentom, pač pa tudi s pogoji, ko smo ta fascinantni pojav na nebu ujeli v fotografski objektiv.

Ključne besede: parhelij, atmosferski halo, Monte Carlo simulacija, kristali ledu

ABSTRACT

In this theasis we study the parhelion – a type of halo phenomenon that occurs due to the refraction of light as it passes through ice crystals in the atmosphere. We determine how light refracts through the characteristic surfaces of the crystals, depending on the angle of incidence. The obtained relation is used to determine the shape of the parhelion and its position in the sky. The varying intensity of the light phenomenon is simulated using the Monte Carlo method, where the square of the Fresnel reflection coefficients is used as the probability for the reflection of light on the surfaces of the crystals. The simulation results are compared with a laboratory experiment in which we observe the refraction of light through a crystal model. It turns out that the theoretical prediction not only matches well with the experiment but also with the conditions when we captured this fascinating phenomenon in the sky with a camera.

Key words: parhelion, atmospheric halo, Monte Carlo simulation, ice crystals

Kazalo

1 Uvod.....	1
2 Lom svetlobe skozi tridimensionalni kristal ledu	2
2.1 Določitev koordinat presečišča žarka in nebesne krogle	8
2.2 Fresnelovi koeficienti odbojnosti za fiktivne žarke	10
3 Eksperiment in Monte Carlo simulacija	12
3.1 Določitev dimenzije haloja.....	12
3.2 Eksperiment.....	13
3.3 Algoritem Monte Carlo simulacije.....	14
4 Analiza rezultatov	15
5 Zaključek.....	18

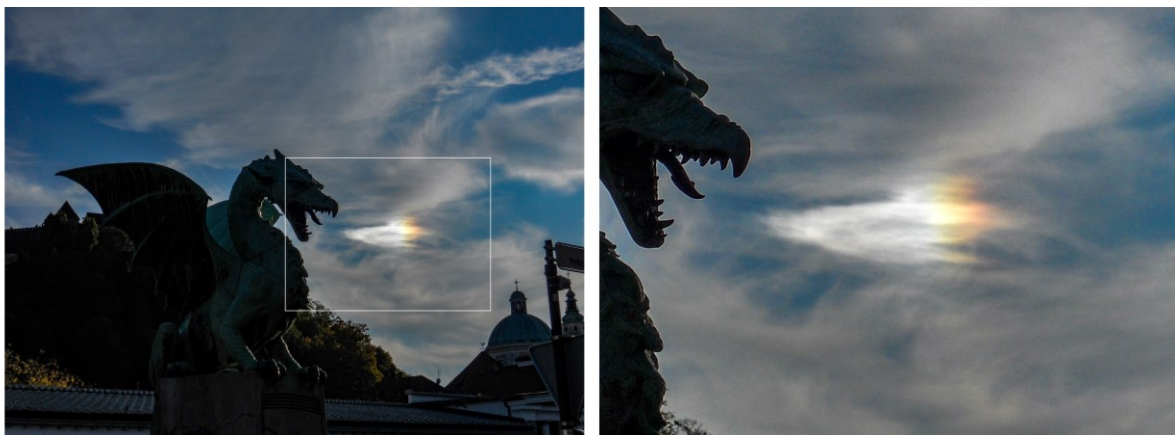
1 Uvod

Haloji so optični pojavi v atmosferi, ki jih vidimo v obliki belih ali obarvanih točk, lokov in krogov. Nastanejo zaradi večkratnega odboja in/ali loma svetlobe v drobnih ledenih kristalih [1-5]. Glede na pogoje v atmosferi kristali najpogosteje nastajajo v obliki mikrometrskih šestkotnih prizem in ploščic [6,7]. Nosilci teh kristalov so večinoma cirusni in cirostratusni oblaki, ki se tvorijo v zgornjih slojih troposfere, lahko pa se pojavijo tudi na površju Zemlje, če so temperature dovolj nizke (v zimskih pogojih, na gorah in v polarnih območjih). Oblika halojev je odvisna od vrste in orientacije kristalov. Na videz nekaterih lokov pa lahko vpliva tudi kotna višina svetlobnega vira na nebu. Svetlobni viri teh pojavov so najpogosteje sončev in lunin disk, lahko pa nastanejo tudi zaradi katerega koli drugega umetnega ali naravnega vira svetlobe. Doslej so bili zabeleženi haloji, ki so nastali zaradi svetlobe bolidov, Venere in izbruhov vulkanov [8]. Z uporabo uličnih svetilk v mestih so ustvarjeni pogoji za nastanek povsem novih oblik haloja, ki nastajajo zaradi divergentnih virov svetlobe [9,10].

Znanstveno raziskovanje halojev se je začelo po znanem haloju, ki so ga opazili nad Rimom v 17. stoletju [11,12]. Takrat so prvič nastale natančne skice opaženih lokov in krogov, na podlagi katerih so največji umi tistega časa poskušali pojasniti njihov nastanek. Velik prispevek k razumevanju haloja je dal Auguste Bravais, ki je uspel matematično opisati večino opaženih lokov in krogov [13]. Pojasnil je tudi, kako je oblika halojev odvisna od kotne višine svetlobnega vira na nebu. Prav tako je prvi eksperimentalno določil optično pot žarkov skozi kristal, tako da je opazoval, kako se svetloba lomi skozi modele kristalov iz stekla, napolnjenih z vodo.

V 20. stoletju sta Robert Greenler in Walter Tape zbirala ledene kristale iz zamrznjene megle, ki je ustvarjala različne haloje. Kasneje sta pod mikroskopom ugotavljala, katere oblike kristalov so bile prisotne v megli, ko je bil opažen določen halo [1-3]. Z razvojem računalnikov so haloje začeli preučevati tudi z Monte Carlo simulacijami, ki so uspešno napovedale njihovo obliko in intenziteto svetlobe [1-3,14]. Na ta način so bili odkriti novi loki, ki do takrat še nikoli niso bili opaženi, in potrjeni so bili drugi, za katere so obstajala le negotova poročila, da so bili opaženi [3].

Haloji so popolnoma nepredvidljivi in se pojavljajo v vseh obdobjih leta in na katerikoli geografski širini in dolžini. Lahko nastanejo tudi večkrat na dan in v povprečju trajajo le nekaj minut. Z razvojem fotoaparátov je raziskovanje halojev pridobilo na popularnosti, saj je prvič mogoče trajno in verodostojno zabeležiti njihov videz. Danes je tudi amaterska fotografija lahko močno orodje za raziskovanje teh pojavov. Zato že leta vedno nosim s seboj majhno žepno kamero. Ena izmed priložnosti, ko sta se mi vztrajnost in trud obrestovala, je bila v soboto, 16. oktobra 2021, okoli 17. ure, ko sem v Ljubljani opazil izjemen primer haloja, prikazanega na sliki 1. Iz njegove oblike in položaja glede na sončev disk in horizont domnevamo, da gre za parhelij [1-3]. Ta vrsta haloja nastane iz ploščatih šestkotnih ledenih kristalov, katerih bazne ploskve so vzporedne s horizontalno ravnino [1-5].



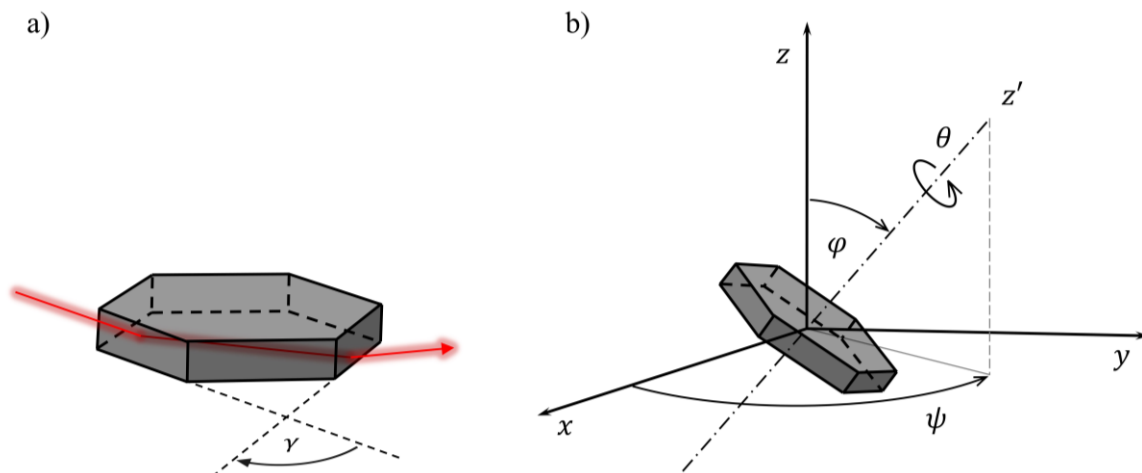
Slika 1. Parhelij posnet z Zmajskega mostu v Ljubljani.

Cilj diplomskega seminarja je preveriti, ali je fotografirani halo pojav parhelij, ter poskusiti rekonstruirati ta pojav eksperimentalno in z Monte Carlo simulacijo. V diplomskem seminarju v poglavju 2 najprej določimo, kako se svetloba lomi skozi tridimenzionalni kristal ledu. Nato izpeljemo Fresnelove koeficiente odbojnosti za fiktivne žarke. Sledi opis eksperimenta, pri katerem opazujemo lom svetlobe skozi model kristala iz akrilnega stekla (poglavje 3). V nadaljevanju predstavimo algoritem Monte Carlo za simulacijo parhelija. V poglavju 4 analiziramo rezultate eksperimenta in Monte Carlo simulacije, v poglavju 5 pa strnemo ugotovitve in nakažemo možnosti nadaljnjega dela.

2 Lom svetlobe skozi tridimenzionalni kristal ledu

Parhelij nastane z lomom svetlobe skozi stranske ploskve kristala, ki med seboj tvorijo kot $\gamma = 60^\circ$, kot je prikazano na sliki 2a. Kristali nastanejo v zgornjih plasteh troposfere, nato zaradi gravitacije padejo v nižje sloje. Med prostim padom skozi atmosfero kristali spontano zavzamejo orientacije, v katerih je aerodinamični upor zraka največji [4,19]. Ta pogoj je izpolnjen za vse orientacije, pri katerih je baza (največja ploskev) kristala vzporedna s horizontalno ravnino.

Pred obravnavo loma svetlobe skozi kristal ledu najprej parametrizirajmo orientacijo kristala. Za opisovanje orientacije kristala glede na kartezični koordinatni sistem, kjer osi x in y definirata horizontalno ravnino, bomo uporabili Eulerjeve kote (φ , θ in ψ), ki so prikazani na sliki 2b. Kot φ opisuje rotacijo kristala okoli osi x , kot ψ rotacijo okoli osi z , kot θ pa rotacijo okoli nove osi z' , ki je na sliki 2b prikazana s črtno črto. Glede na to, da se kristali v prostem padu spontano orientirajo tako, da je njihova bazna ploskev vzporedna s horizontalno ravnino xy , je Eulerjev kot φ enak 0° . V tem primeru se kota θ in ψ ujemata, zato bomo definirali samo enega od njiju. Eulerjev kot θ bi lahko definirali na intervalu $[0, 2\pi]$, vendar bomo zaradi enostavnosti ta kot definirali na intervalu $[0, \pi/2]$. S spreminjanjem vrednosti kota θ na tem intervalu rotiramo kristal okoli osi z' . V nadaljevanju bomo videli, da na ta način lahko znotraj tega intervala manipuliramo tudi z vrednostjo vpadnega kota žarka pri lomu iz zraka v kristal.



Slika 2. a) Optična pot loma svetlobe skozi nasprotne ploskve kristala, ki se sekajo pod kotom γ . b) Orientacijo kristala v kartezičnem koordinatnem sistemu z osmi x , y in z opišemo z Eulerjevimi koti (φ , θ in ψ). Os z' je pravokotna na bazno ploskev kristala.

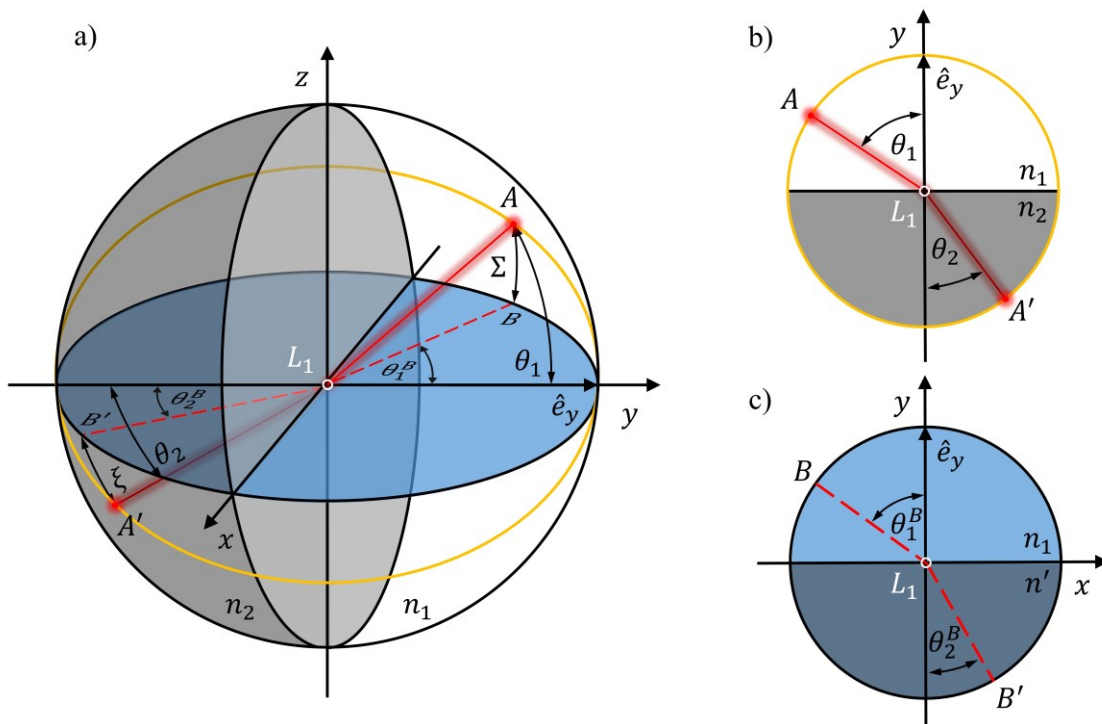
Da bi določili, kako se svetloba lomi skozi tridimenzionalni kristal ledu, bomo uporabili idejo o fiktivnih žarkih, ki jih je vpeljal Bravais [13]. Na sliki 3 opazujemo žarek, ki se v točki L_1 lomi iz optično redkejšje snovi (zrak) v optično gostejšo snov (led). Izhodišče kartezičnega koordinatnega sistema je v točki L_1 , okoli katere narišemo enotsko kroglo. Vertikalna ravnina xz predstavlja mejo med zrakom in ledom. Prostor znotraj poloble, ki vsebuje negativni del osi y , je napolnjen z ledom z lomnim količnikom n_2 , prostor znotraj nasprotne poloble, ki vsebuje pozitivni del osi y , pa je sestavljen iz zraka z lomnim količnikom n_1 . Žarek vstopi v enotsko kroglo v točki A , se lomi v točki L_1 in izstopi iz krogle v točki A' . V točki L_1 se lomi po lomnem zakonu:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \mu, \quad (1)$$

kjer sta θ_1 in θ_2 vpadni in lomni koti, μ pa je relativni lomni količnik $\mu = n_2/n_1$. Os y , vpadni in lomljeni žarek so koplanarni in tvorijo ravnino, ki je ločeno prikazana na sliki 3b. Presečišče površine enotske krogle in ravnine, ki jo tvorijo te tri črte, je na sliki 3a označeno z rumeno krožnico.

Ekvatorialna ravnina enotske krogle (xy) je horizontalna ravnina, s katero so vzporedne bazne ploskve kristala. V nadaljevanj bomo to ravnino imenovali Bravaisova ravnina. Kot Σ , ki ga tvori vpadni žarek z Bravaisovo ravnino, predstavlja kotno višino sončevega diska na nebu. Po lomu skozi kristal žarek izstopi iz krogle pod kotom ξ glede na Bravaisovo ravnino. Točko B definiramo kot presečišče ekvatorja in ortodromije, ki vsebuje pola krogle in točko A . Podobno določimo točko B' kot presečišče ekvatorja z ortodromijo, ki vsebuje pola krogle in točko A' . Tedaj bosta daljici $\overline{BL_1}$ in $\overline{B'L_1}$ ortogonalni projekciji vpadnega (AL_1) in lomljenega (L_1A') žarka na Bravaisovo ravnino.

Bravaisova ideja je, da lahko ortogonalne projekcije žarkov obravnavamo kot fiktivne žarke. Namesto loma realnega žarka bomo zato opazovali lom njegove projekcije na Bravaisovi ravnini. Tako imenovani fiktivni žarek vstopi v enotsko kroglo v točki B , se lomi v točki L_1 in zapusti kroglo v točki B' . Os y ter fiktivni vpadni in lomljeni žarki ležijo v Bravaisovi ravnini, ki je ločeno prikazana na sliki 3c. Fiktivni vpadni in lomljeni žarki z osjo y oklepata kota θ_1^B in θ_2^B . Os x predstavlja mejo med zrakom in psevdo-materialom, v katerem se fiktivni žarek lomi. Polovica Bravaisove ravnine, ki vsebuje pozitivni del osi y , predstavlja zrak z lomnim količnikom n_1 , druga polovica pa predstavlja psevdo-material z psevdo-lomnim količnikom n' , ki ga bomo določili v nadaljevanju.



Slika 3. a) Prikaz izometrične projekcije loma žarka (polna rdeča črta) iz zraka v led. Lomni količnik zraka je n_1 , ledu pa n_2 . Vpadni žarek oklepa kot θ_1 z osjo y in kot Σ z ravnino xy . Lomljeni žarek oklepa kot θ_2 z osjo y in kot ξ z ravnino xy . Ortogonalna projekcija žarka na ravnino xy je prikazana z rdečo črtkano črto. Projekcije vpadnega in lomljenega žarka z osjo y oklepata kota θ_1^B in θ_2^B . Os z je pravokotna na ravnino xy . Vektor $\hat{e}_y$ je enotski vektor osi y . b) Prikaz ravnine, v kateri ležijo os y , vpadni in lomljeni žarek. c) Prikaz ravnine, v kateri ležijo os y in projekcije vpadnega in lomljenega žarka. Projekcijo žarka na to ravnino obravnavamo kot fiktivni žarek, ki se lomi iz zraka v psevdo-material, katerega psevdo-lomni količnik je n' .

Vpadni in lomljeni žarek bomo obravnavali kot enotska vektorja $\widehat{AL_1}$ in $\widehat{L_1A'}$. Koordinate vektorja vpadnega žarka so $(-\sin \theta_1^B \cos \Sigma, \cos \theta_1^B \cos \Sigma, \sin \Sigma)$, koordinate vektorja lomljenega žarka pa so $(\sin \theta_2^B \cos \xi, -\cos \theta_2^B \cos \xi, -\sin \xi)$. Koordinate enotskega vektorja $\hat{e}_y$ so $(0,1,0)$. Iz skalarnega produkta vektorja $\hat{e}_y$ z vektorjema vpadnega ($\widehat{AL_1}$) in lomljenega ($\widehat{L_1A'}$) žarka dobimo

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_1^B \cos \Sigma, \quad (2)$$

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_2^B \cos \xi. \quad (3)$$

Vektorji $\widehat{AL_1}$, $\widehat{L_1A'}$ in $\hat{e}_y$ so koplanarni, kar pomeni, da velja $(\widehat{AL_1} \times \hat{e}_y) \cdot \widehat{L_1A'} = 0$. Iz tega sledi:

$$\sin \theta_1^B \cos \Sigma \sin \xi - \sin \theta_2^B \sin \Sigma \cos \xi = 0. \quad (4)$$

Ob upoštevanju, da velja $\sin^2 \theta_1^B + \cos^2 \theta_1^B = 1$, izpeljemo $\sin \theta_1^B$ iz enačbe (2) in ga vstavimo v enačbo (4). Podobno izpeljemo $\sin \theta_2^B$ iz enačbe (3) in ga prav tako vstavimo v enačbo (4). Z ureditvijo nastalega izraza, dobimo:

$$\frac{\sin \Sigma}{\sin \xi} = \mu. \quad (5)$$

Iz tega vidimo, da se v vertikalni ravnini žarek lomi po lomnem zakonu. Če enačbi (1) in (2) vstavimo v enačbo (3) ter uporabimo razmerje, podano z enačbo (5), dobimo lomni zakon za fiktivne žarke:

$$\frac{\sin \theta_1^B}{\sin \theta_2^B} = \frac{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \Sigma}}{\cos \Sigma}. \quad (6)$$

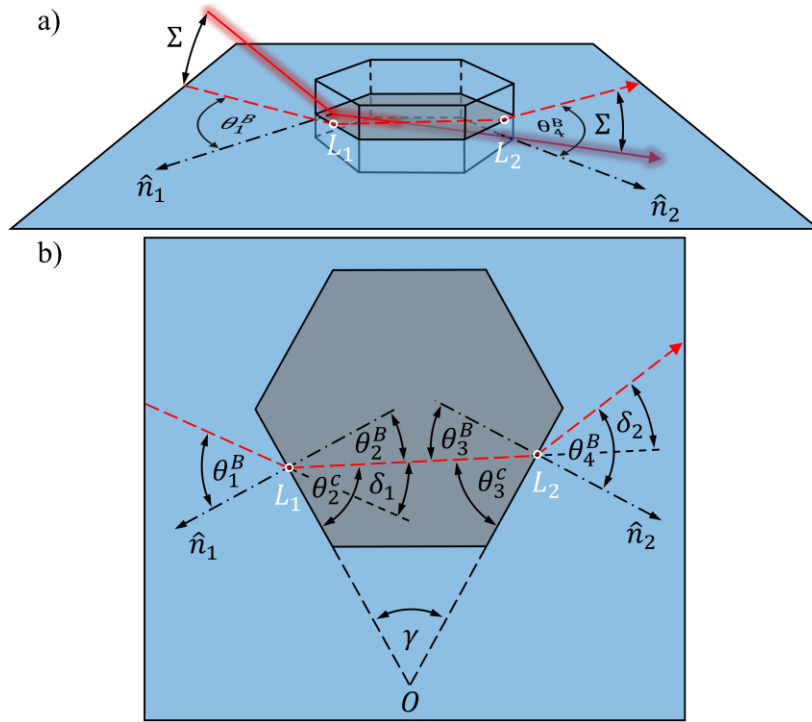
Desna stran enačbe (6) je enaka relativnemu lomnemu količniku (μ') za prehod fiktivnega žarka iz zraka v psevdo-material. Ob upoštevanju, da velja $\mu' = n'/n_1$, izpeljemo izraz za psevdo-lomni količnik:

$$n' = \frac{n_1 \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \Sigma}}{\cos \Sigma}. \quad (7)$$

Z analizo tega izraza ugotovimo, da se ob povečanju kota Σ imenovalc zmanjšuje hitreje kot števec, zato se n' povečuje. V primeru, ko je sončev disk na horizontu ($\Sigma = 0$), vpadni in projicirani žarek sovpadata, psevdo-lomni količnik n' pa je enak lomnemu količniku ledu n_2 .

Dobljeni rezultat bomo uporabili pri lomu žarka iz zraka v led. Postavimo Bravaisovo ravnino tako, da vsebuje težišče kristala in je vzporedna z njegovimi baznimi ploskvami, kot je prikazano na sliki 4a. Žarek vpade na Bravaisovo ravnino v točki L_1 pod kotom Σ glede na ravnino in se lomi v kristalu. Projekcija vpadnega žarka se prav tako lomi v točki L_1 , vendar znotraj dvodimenzionalnega šestkotnega kristala, ki ima psevdo-lomni količnik n' , podan z enačbo (7). Lom fiktivnega žarka v točki L_1 je opisan z enačbo (6) in prikazan na sliki 4b. Iz enačbe (6) lahko izračunamo vrednost kota θ_2^B , ki nam pove, koliko se spremeni smer žarka v horizontalni ravnini po lomu iz zraka v led. Žarek pa spremeni smer tudi v vertikalni ravnini. To pomeni, da ni več pod kotom Σ glede na Bravaisovo ravnino. Iz enačbe (5) lahko izrazimo lomni kot ξ , ki ga žarek oklepa z Bravaisovo ravnino. Kot θ_3^B med fiktivnim žarkom in osjo $\hat{n}_2$, je vpadni kot pri lomu v točki L_2 na izstopu iz dvodimenzionalnega kristala. Opazujmo trikotnik $\Delta(L_1OL_2)$ na sliki 4b. Kot v točki O je $\gamma = 60^\circ$, kota v točkah L_1 in L_2 pa sta komplementarna kota θ_2^C in θ_3^C kotoma θ_2^B in θ_3^B . Ker je vsota vseh kotov znotraj trikotnika enaka 180° , ugotovimo da je:

$$\theta_3^B = \gamma - \theta_2^B. \quad (8)$$



Slika 4. a) Prikaz izometrične projekcije loma žarka skozi šestkotno ploščico ledu. Žarek je prikazan s polno rdečo črto, ortogonalna projekcija žarka na horizontalno ravnino pa z rdečo črtkano črto. Os $\hat{n}_1$ je pravokotna na ploskev kristala v točki L_1 , os $\hat{n}_2$ pa na ploskev kristala v točki L_2 . Projekcija vpadnega žarka oklepa kot θ_1^B z osjo $\hat{n}_1$. Projekcija izhodnega žarka oklepa kot θ_4^B z osjo $\hat{n}_2$. Kot Σ predstavlja kotno višino sončevega diska na nebu. b) Ortografska projekcija kristala in loma žarka na Bravaisovo ravnino. Projekcijo žarka obravnavamo kot fiktivni žarek, ki se lomi skozi nasprotni ploskvi dvodimenzionalnega šestkotnega kristala, ki se sekata pod kotom γ . V kristalu fiktivni žarek oklepa kot θ_2^B z osjo $\hat{n}_1$ in kot θ_3^B z osjo $\hat{n}_2$. Kota θ_2^C in θ_3^C sta komplementarna kotoma θ_2^B in θ_3^B . Smer fiktivnega žarka se najprej spremeni za kot δ_1 v točki L_1 , nato pa za kot δ_2 v točki L_2 .

Fiktivni žarek se lomi iz psevdo-materiala v zrak v točki L_2 in zapusti dvodimenzionalni kristal. Z enačbo (7) zdaj ne moremo določiti psevdo-lomnega količnika tega psevdo-materiala, saj je ta enačba definirana pri lomu iz zraka v led za žarek, ki oklepa kot Σ z Bravaisovo ravnino. Po izstopu iz kristala v točki L_2 je žarek pod kotom ξ glede na Bravaisovo ravnino. Za določitev psevdo-lomnega količnika za ta primer moramo ponoviti celoten postopek s katerim smo dobili enačbo (7). Razlika je v smeri žarka, kar pomeni, da žarek zdaj vstopi v enotsko kroglo v točki A' in jo zapusti v točki A . Glede na to, da se zdaj žarek lomi iz ledu v zrak, imamo v enačbi (5), namesto relativnega lomnega količnika ledu in zraka μ , relativni lomni količnik zraka in ledu $\eta = 1/\mu$. Z uporabo enakih korakov kot pri izpeljavi izraza za n' dobimo, da je psevdo-lomni količnik n'' , za primer loma iz ledu v zrak pod kotom ξ glede na Bravaisovo ravnino [21,22]:

$$n'' = \frac{n_1 \cos \xi}{\sqrt{\eta^2 - \sin^2 \xi}}. \quad (9)$$

Še enkrat poudarimo, da ima v primeru ko žarek sovpada s svojo projekcijo ($\xi = 0$), psevdo-lomni količnik n'' najmanjšo vrednost, ki je enaka lomnemu količniku ledu n_2 . Glede na to, da bo n'' vedno večji od lomnega količnika zraka n_1 , moramo upoštevati, da se lahko fiktivni

žarek pri določenih vrednostih vpadnega kota θ_3^B popolnoma odbije v točki L_2 . Fiktivni žarek bo izstopil iz kristala v točki L_2 le, če je kot med fiktivnim žarkom in osjo $\hat{n}_2$ manjši od mejne vrednosti θ_m^B :

$$\theta_m^B = \arcsin(\eta''), \quad (10)$$

pri čemer je $\eta'' = n_1/n''$. Žarki, ki se lomijo iz kristala, se lomijo pod kotom θ_4^B , ki ga dobimo iz lomnega zakona:

$$\frac{\sin \theta_3^B}{\sin \theta_4^B} = \eta''. \quad (11)$$

V vertikalni ravnini je lom žarka v točki L_2 opisan z enačbo (5), v kateri je sedaj namesto relativnega lomnega količnika za prehod iz ledu v zrak, relativni lomni količnik za prehod iz zraka v led. Iz tega vidimo, da v vertikalni ravnini ostaja smer žarka pod enakim kotom Σ glede na Bravaisovo ravnino, kot je bila pred lomom skozi kristal. Spomnimo se, da kot Σ predstavlja kotno višino sončevega diska na nebu v trenutku, ko je bil halo s slike 1 opažen. Na podlagi tega, kdaj in kje je halo opažen, lahko izračunamo, da je $\Sigma \approx 11^\circ$. Izračun presega meje tega seminarja.

Smer fiktivnih žarkov, ki uspejo zapustiti kristal, se najprej v točki L_1 spremeni za kot δ_1 , ki je enak razliki med vpadnim kotom θ_1^B in lomnim kotom θ_2^B ob prvem lomu. Po tem se smer širjenja ponovno spremeni v točki L_2 za kot δ_2 , ki je enak razliki med lomnim kotom θ_4^B in vpadnim kotom θ_3^B pri drugem lomu. Skupni odklon fiktivnega žarka (δ) je:

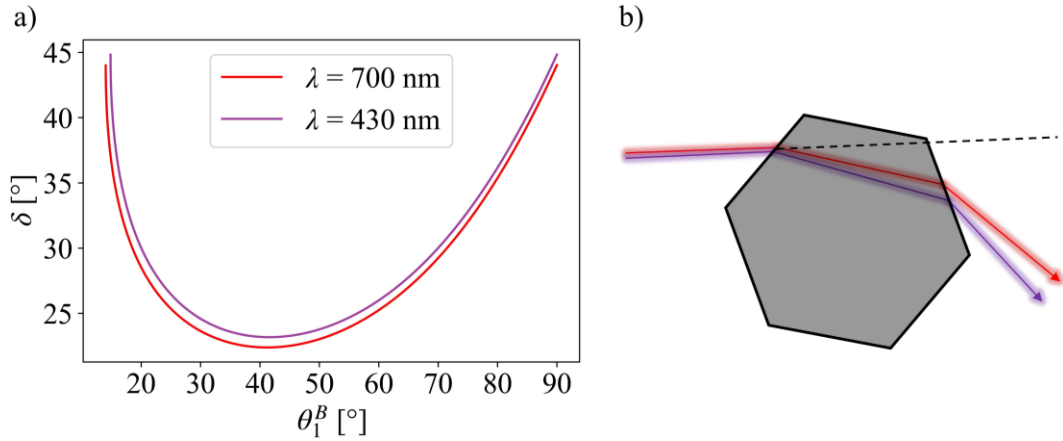
$$\delta = \theta_1^B - \theta_2^B + \theta_4^B - \theta_3^B. \quad (12)$$

Če vstavimo enačbe (6), (8) in (11) v enačbo (12), dobimo:

$$\delta = \theta_1^B - \gamma + \arcsin\{\mu'' \sin[\gamma - \arcsin(\eta' \sin \theta_1^B)]\}, \quad (13)$$

kjer je $\mu'' = n''/n_1$, η' pa je n_1/n' . Vidimo, da je odklon fiktivnega žarka funkcija vpadnega kota θ_1^B , kota med stranicama kristala γ , višine sončevega diska Σ in lomnega količnika zraka n_1 in ledu n_2 . Kot θ_1^B spreminjamo z vrtenjem kristala, ki ga opisuje Eulerjev kot θ . Ker nas zanima lom vidne svetlobe, v enačbi (13) uporabimo vrednosti lomnega količnika ledu v vidnem delu spektra. Za rdečo svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 700$ nm je $n_2 = 1,307$, za vijolično svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 430$ nm pa je $n_2 = 1,317$ [20].

Rešitev enačbe (13) je grafično ponazorjena na sliki 5a za rdečo in vijolično svetlobo. Opozorimo, da se v obeh primerih sprva z večanjem vpadnega kota θ_1^B odklon fiktivnega žarka δ zmanjšuje in doseže minimalno vrednost, nato pa z nadaljnjim povečevanjem θ_1^B odklon narašča.



Slika 5. a) Odvisnost kota odklona (δ) od vpadnega kota (θ_1^B) za fiktivni žarek rdeče in vijolične svetlobe. b) Primer različnega loma rdečega in vijoličnega fiktivnega žarka pri enakem vpadnem kotu. S črtkano črto je prikazana začetna smer obeh žarkov.

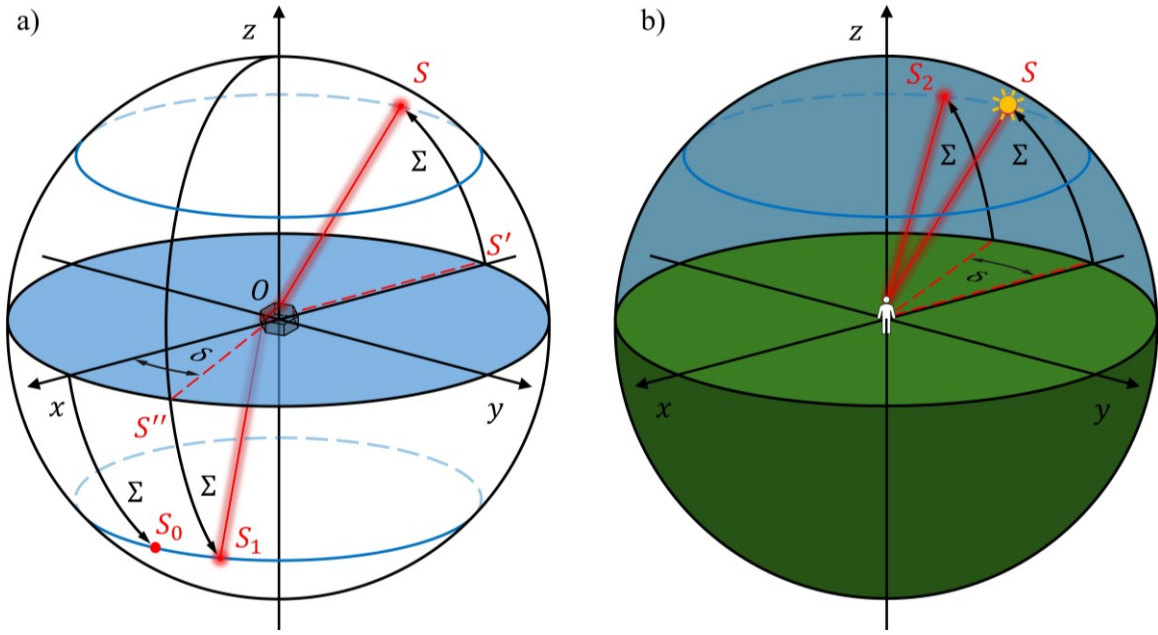
Funkcija $\delta(\theta_1^B)$ doseže minimalno vrednost (δ_{min}), kadar je $\frac{d\delta}{d\theta_1^B} = 0$ in $\frac{d^2\delta}{d\theta_1^{B^2}} > 0$, od koder dobimo:

$$\delta_{min} = 2 \arcsin \left[\mu' \sin \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right] - \gamma. \quad (14)$$

Če v enačbo (14) vstavimo vrednost lomnega količnika n_2 za rdečo in vijolično svetlobo, dobimo, da sta minimalna odklona za ti dve barvi svetlobe $\delta_{min}(rdeča) = 21,7^\circ$ in $\delta_{min}(vijolična) = 22,4^\circ$, kar pomeni, da se rdeči svetlobi najmanj spremeni smer širjenja, vijolični pa najbolj (slika 5b). Kot δ_{min} za vse ostale valovne dolžine svetlobe v vidnem delu spektra bo med tema dvema mejnima vrednostima. To je razlog, zakaj je desni rob haloja na sliki 1 rdečkaste barve. Ker se rdeča svetloba na poti skozi kristal lomi najmanj, bo najbližje viru svetlobe, torej sončevemu disku. Prav tako lahko na podlagi tega razložimo, zakaj je bela prevladujoča barva levo od rdeče. Na tej kotni oddaljenosti od sončevega diska se lahko lomi svetloba vseh barv. Ker so v tem primeru v očesu enako vzbujene vse vrste čepkov, vidimo belo svetlobo.

2.1 Določitev koordinat presečišča žarka in nebesne krogle

Določimo kartezični koordinatni sistem s koordinatnim izhodiščem v težišču kristala in okoli njega postavimo enotsko kroglo, kot je ponazorjeno na sliki 6a. Žarek vstopi v kroglo v točki S pod kotom Σ glede na Bravaisovo ravnino. Če v koordinatnem izhodišču ne bi bilo kristala, bi žarek izstopil iz krogle v točki S_0 pod enakim kotom glede na Bravaisovo ravnino. Obe točki S in S_0 se nahajata na krožnicah, označenih z modro na sliki 6a. Ti krožnici sta vzporedni z Bravaisovo ravnino in sta od nje enako oddaljeni. Na začetku poglavlja 2 smo ugotovili, da žarek po lomu skozi kristal oklepa enak kot Σ s Bravaisovo ravnino, kot pred vstopom v kristal. To pomeni, da bo žarek po lomu skozi kristal izstopil iz enotske krogle nekje na krožnici, ki vsebuje točko S_0 .



Slika 6. Lokalni koordinatni sistem a) kristala in b) opazovalca z osmi x , y in z . Žarek se zaradi loma odkloni za kot δ v horizontalni ravnini. V vertikalni ravnini ostaja smer žarka pod enakim kotom Σ glede na Bravaisovo ravnino, kot pri vpadu na kristal, pri čemer kot Σ predstavlja kotno višino sončevega diska na nebu.

Da bi ugotovili, kje je ta točka, moramo vedeti, koliko se žarek lomi v Bravaisovi ravnini. To bomo določili na podlagi ortogonalne projekcije loma žarka na Bravaisovo ravnino, ki je na sliki 6 prikazana s črtkano rdečo črto. Vpadni fiktivni žarek vstopi v enotno kroglo v točki S' , se pri lomu skozi kristal odkloni za kot δ in izstopi iz enotne krogle v točki S'' . Presek krožnice, ki vsebuje točko S_0 , in ortodromije, ki vsebuje pola krogle in točko S'' , določa točko S_1 , kjer lomljeni žarek izstopa iz krogle. Kartezične koordinate izrazimo z polarnim (ϕ) in azimutnim (φ) kotom:

$$x = \sin \phi \cos \varphi, \quad (15)$$

$$y = \sin \phi \sin \varphi, \quad (16)$$

$$z = \cos \phi. \quad (17)$$

Na sliki 6a vidimo, da je $\phi = 90^\circ + \Sigma$. Azimutni kot φ je definiran med pozitivnim delom osi x in ortogonalne projekcije daljice $\overline{OS_1}$ na Bravaisovo ravnino. Vidimo tudi, da je $\varphi = \delta$. Postavimo sedaj navideznega opazovalca v izhodišče koordinatnega sistema, kot je to prikazano na sliki 6b. V tem primeru je ekvator krogle horizont, najvišja točka krogle pa zenit. Točka S predstavlja položaj sončevega diska. Točka S_2 je simetrična točki S_1 glede na koordinatno izhodišče. Dobimo jo tako, da koordinate, podane z enačbami (15) do (17), pomnožimo z -1 . Navidezni opazovalec mora pogledati to točko na nebu, da vidi žarek, ki se lomi v kristalu. Rezultat tega, kar vidi navidezni opazovalec, predstavimo na grafu yz , kjer je y abscisa, z pa ordinatna os. Koordinate točke S_2 so:

$$y = -\sin \phi \sin \varphi, \quad (18)$$

$$z = -\cos \varphi. \quad (19)$$

Iz parametričnih enačb (18) in (19) lahko določimo obliko parhelija, ne moremo pa napovedati njegove jakosti. Če želimo napovedati tudi jakost, moramo v vsaki točki izračunati še intenziteto svetlobe. Kako to naredimo, bomo pa pojasnili v naslednjem podpoglavju.

2.2 Fresnelovi koeficienti odbojnosti za fiktivne žarke

Pri obravnavanju loma svetlobe smo do sedaj opazovali, kaj se zgodi z žarkom, ki se lomi v točkah L_1 in L_2 (glej sliko 4). Vpadni žarek se najprej lomi v točki L_1 ob vstopu v kristal, nato pa ponovno v točki L_2 ob izstopu iz kristala. Vendar se v obeh primerih vpadni snop svetlobe, ki smo ga ponazorili z žarkom, razdeli na odbitega, ki ga nismo obravnavali, in lomljenega, ki smo mu sledili. Koeficient odbojnosti je podan z razmerjem amplitud jakosti električnega polja v odbiti in vpadni svetlobi. Odvisen je tudi od smeri jakosti električnega polja glede na vpadno ravnino. Za transversalno električno vpadno valovanje, pri katerem je jakost električnega polja pravokotna na vpadno ravnino, je koeficient odbojnosti ($\rho_{\perp}$) [23]:

$$\rho_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \mu \cos \theta_r}{\cos \theta_i + \mu \cos \theta_r}, \quad (20)$$

kjer sta θ_i in θ_r vpadni in lomni kot. Kota θ_i in θ_r ustrezata vpadnim in lomnim kotom θ_1 in θ_2 , ki smo jih določili na sliki 3a med osjo y ter vpadnim in lomnim žarkom. Za transversalno magnetno valovanje, kjer je jakost električnega polja vzporedna z vpadno ravnino, je koeficient odbojnosti ($\rho_{\parallel}$):

$$\rho_{\parallel} = \frac{-\mu \cos \theta_i + \cos \theta_r}{\mu \cos \theta_i + \cos \theta_r}. \quad (21)$$

Fresnelove koeficiente, podane z enačbama (20) in (21), želimo izraziti s kotoma θ_1^B in θ_2^B in z lomnima količnikoma n_1 in n' . Če vstavimo enačbi (2) in (3) v enačbi (20) in (21) in uporabimo razmerje, podano z enačbo (5), dobimo, da so Fresnelovi koeficienti odbojnosti za fiktivne žarke na meji zrak – led

$$\rho_{\perp}^B = \frac{\cos \theta_1^B - \mu' \cos \theta_2^B}{\cos \theta_1^B + \mu' \cos \theta_2^B} \quad (22)$$

za transversalno električno in

$$\rho_{\parallel}^B = \frac{-\mu^2 \cos \theta_1^B + \mu' \cos \theta_2^B}{\mu^2 \cos \theta_1^B + \mu' \cos \theta_2^B}, \quad (23)$$

za transversalno magnetno valovanje. Pri dani orientaciji kristala sta vrednosti koeficientov $\rho_{\perp}^B$ in $\rho_{\parallel}^B$ enaki ustreznima Fresnelovima koeficientoma $\rho_{\perp}$ in $\rho_{\parallel}$, podanima z enačbama (20) in (21), za katerokoli vrednost kota Σ .

V primeru loma iz ledu v zrak v točki L_2 sta Fresnelova koeficienta odbojnosti prav tako podana z enačbama (20) in (21), le da sta sedaj θ_3^B in θ_4^B ortogonalni projekciji ustreznih kotov θ_i in θ_r , namesto μ pa v enačbah nastopa η . Zdaj želimo Fresnelove koeficiente odbojnosti izraziti s kotoma θ_3^B in θ_4^B in z lomnima količnikoma n_1 in n'' . Najprej ugotovimo, da bi slika 3 izgledala popolnoma enako za primer, v katerem bi se žarek lomil iz ledu v zrak. Takrat bi žarek vstopil v kroglo v točki A' , se lomil v točki L_1 in izstopil iz krogle v točki A . Vpadnemu kotu θ_i ustreza kot θ_3 , ki ga vpadni žarek oklepa z osjo y . Lomnemu kotu θ_r ustreza kot θ_4 , ki ga lomljeni žarek oklepa z osjo y . S ponovitvijo postopka, ki smo ga uporabili, da smo prišli do enačb (2) in (3), dobimo

$$\cos \theta_3 = \cos \theta_3^B \cos \xi, \quad (24)$$

$$\cos \theta_4 = \cos \theta_4^B \cos \Sigma. \quad (25)$$

Če vstavimo enačbi (24) in (25) v enačbi (20) in (21) in uporabimo enačbo (5), v kateri namesto μ nastopa η , dobimo, da so Fresnelovi koeficienti odbojnosti za fiktivne žarke na meji led – zrak

$$\rho_{\perp}^B = \frac{\mu'' \cos \theta_3^B - \cos \theta_4^B}{\mu'' \cos \theta_3^B + \cos \theta_4^B}, \quad (26)$$

za transversalno električno in

$$\rho_{\parallel}^B = \frac{-\mu'' \cos \theta_3^B + \mu^2 \cos \theta_4^B}{-\mu'' \cos \theta_3^B + \mu^2 \cos \theta_4^B}, \quad (27)$$

za transversalno magnetno valovanje. Pri dani orientaciji kristala sta vrednosti koeficientov $\rho_{\perp}^B$ in $\rho_{\parallel}^B$, podani z enačbama (26) in (27), enaki ustreznima Fresnelovima koeficientoma $\rho_{\perp}$ in $\rho_{\parallel}$, podanima z enačbama (20) in (21), za katerokoli vrednost kota ξ .

Odbojnost (R) je razmerje med energijo v odbitem in vpadnem snopu. Za transversalno električno valovanje je

$$R_{\perp} = |\rho_{\perp}^B|^2, \quad (28)$$

za transversalno magnetno pa

$$R_{\parallel} = |\rho_{\parallel}^B|^2. \quad (29)$$

Glede na to, da je sončna svetloba nepolarizirana, bomo pri izračunu odbojnosti uporabili aritmetično sredino odbojnosti za ti dve polarizacijski stanji:

$$R = \frac{1}{2} (R_{\perp} + R_{\parallel}). \quad (30)$$

Na začetku tega poglavja smo najprej določili, kako se svetloba lomi skozi kristal ledu, katerega bazna ploskev je horizontalna, orientacija okoli pravokotnice na bazno ploskev pa je naključna. V nadaljevanju smo določili koordinate presečišča žarka in nebesne krogle, na podlagi katerih lahko določimo obliko parhelijskega oblaka. Nato smo pokazali, kako se spreminja

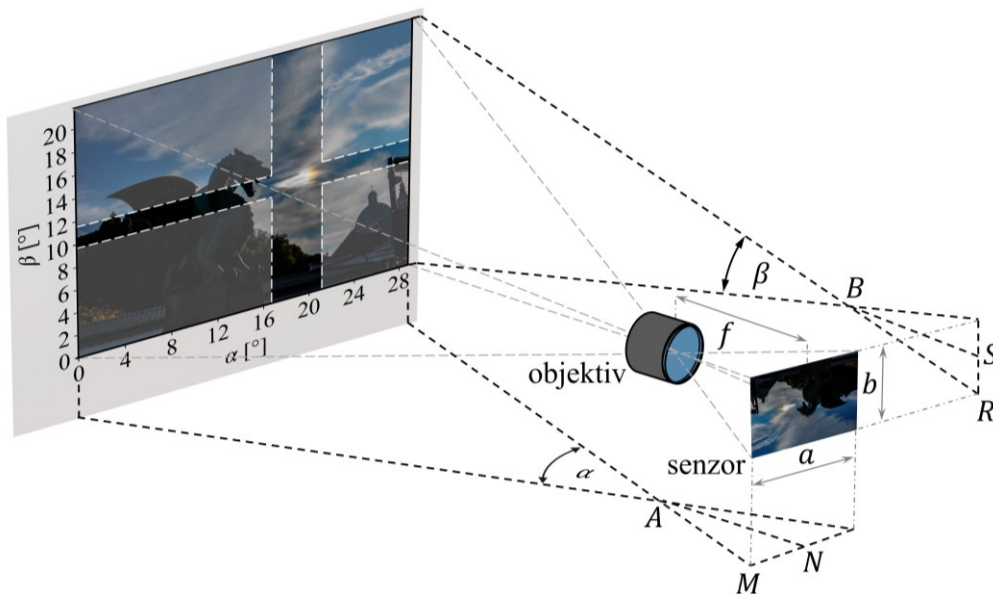
intenziteta vpadnega žarka po lomu skozi kristal. V naslednjem poglavju bomo opisali, kako eksperimentalno in z metodo Monte Carlo simuliramo parhelij.

3 Eksperiment in Monte Carlo simulacija

V tem poglavju bomo najprej pogledali, kako iz fotografije na sliki 1 dobimo dimenzije haloja. V nadaljevanju bomo pokazali, kako lahko halo eksperimentalno prikažemo v laboratoriju. Nato bomo pojasnili, kako z metodo Monte Carlo simuliramo velikost in intenziteto haloja.

3.1 Določitev dimenzije haloja

Da bi lahko primerjali numerične rezultate metode Monte Carlo z dimenzijo fotografiranega haloja (slika 1), moramo poznati kotno dolžino in širino fotografije, kar pomeni, da moramo določiti zorni kot fotoaparata. Za to potrebujemo dimenzije senzorja fotoaparata in goriščno razdaljo, ki je bila uporabljena pri fotografiranju. Fotografija na sliki 1 je bila posneta s fotoaparatom *Nikon Coolpix S2500*, ki ima senzor dolžine $a = 6,16$ mm in širine $b = 4,62$ mm [26]. Goriščna razdalja f je bila 12 mm. To je razdalja med objektivom in senzorjem znotraj fotoaparata, kot je prikazano na sliki 7.



Slika 7. Razdalja med objektivom in senzorjem je goriščna razdalja f . Fotoaparat ima senzor z dolžino a in širino b . Horizontalni in vertikalni zorni kot fotoaparata sta α in β .

Poglejmo trikotnika $\Delta(AMN)$ in $\Delta(BRS)$ na sliki 7. Daljici $\overline{AN}$ in $\overline{BS}$ sta enaki goriščni razdalji f . Daljica $\overline{MN}$ je enaka polovici dolžine senzorja a . Daljica $\overline{RS}$ je enaka polovici širine senzorja b . Iz trikotnika $\Delta(AMN)$ lahko zapišemo, da je $\angle(MAN) = \arctan(a/(2f))$, in iz trikotnika $\Delta(BRS)$, da je $\angle(RBS) = \arctan(b/(2f))$. Iz slike 7 razberemo, da je kot $\angle(MAN)$ enak polovici horizontalnega zornega kota fotoaparata α , kot $\angle(RBS)$ pa polovici vertikalnega zornega kota fotoaparata β . Iz tega sledi:

$$\alpha = 2 \arctan\left(\frac{a}{2f}\right) \quad (31)$$

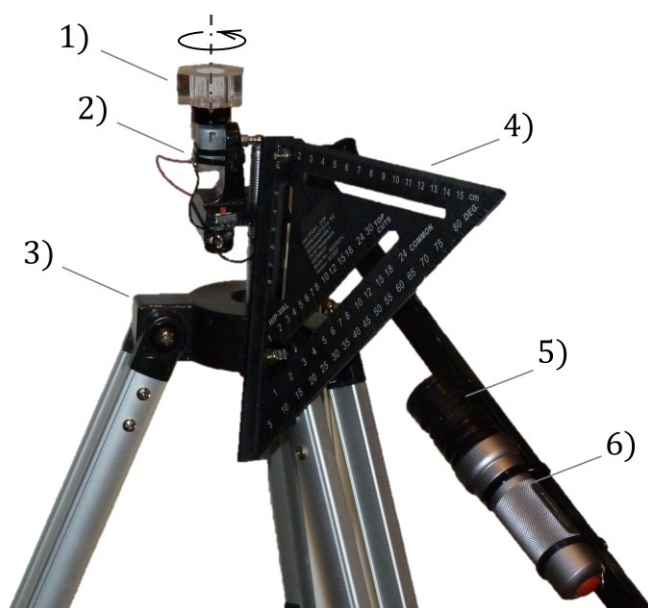
in

$$\beta = 2 \arctan\left(\frac{b}{2f}\right). \quad (32)$$

Ko vstavimo podatke za a , b in f , dobimo, da je $\alpha = 28,8^\circ$ in $\beta = 21,8^\circ$. Zdaj imamo merilo, glede na katerega lahko primerjamo halo na sliki 1, in ugotovimo, da je njegova kotna širina približno 4° in kotna višina približno 2° .

3.2 Eksperiment

Kot smo že omenili, zmrznjena megla, cirusni in cirostratusni oblaki vsebujejo ogromno število kristalov, ki prispevajo k nastanku parhelijskega haloja. To so ploščati šestkotni ledeni kristali, katerih bazne ploskve so horizontalne. Orientacije kristalov okoli pravokotnice na bazno ploskev so popolnoma naključne. V laboratorijskih pogojih imamo samo en model kristala iz akrilnega stekla. Z vrtenjem modela kristala lahko simuliramo poljubno orientacijo v prostoru [24,25]. V ta namen smo model kristala namestili na vertikalno os motorja, kot je prikazano na sliki 8. Model kristala, ki ga motor vrti okoli vertikalne osi, za nas predstavlja populacijo ogromnega števila kristalov, katerih orientacije okoli vertikalne osi so povsem naključne. Na ta način lahko v laboratorijskih pogojih simuliramo oblak. Vrteči se kristal osvetlimo z LED svetilko, ki je nameščena na palici, kot je prikazano na sliki 8. Palico lahko vrtimo okoli konca, ki je pritrjen na koordinatno izhodišče kotomera. Z vrtenjem palice simuliramo kotno višino Σ sončevega diska na nebu. Med modelom kristala in LED svetilko je plankonveksna leča, ki pretvori divergentni svetlobni snop svetilke v vzporedne žarke. Lom svetlobe skozi kristal opazujemo na približno 1 m oddaljenem zaslonu.



Slika 8. Eksperimentalno postavitev sestavljajo: 1) model kristla, 2) motor, 3) stojalo, 4) kotomer, 5) plankonveksna leča in 6) divergentni vir svetlobe.

3.3 Algoritem Monte Carlo simulacije

V podpoglavju 2.1 smo določili koordinate presečišča žarka in nebesne krogle po lomu skozi kristal ledu (glej enačbi (18) in (19)). Na podlagi teh enačb lahko določimo obliko haloja. V podpoglavju 2.2 smo pokazali, kako s pomočjo Fresnelovih koeficientov odbojnosti določimo spremembo intenzitete vpadnega žarka po lomu skozi kristal ledu. Intenziteto svetlobe haloja lahko simuliramo z metodo Monte Carlo tako da, kvadrat Fresnelovih koeficientov odbojnosti uporabimo kot verjetnost za odboj svetlobe na ploskvah kristalov [14].

Obravnavamo nepolarizirano svetlobo, ki se lomi v šestkotnem kristalu, katerega bazna ploskev je horizontalna, orientacija okoli pravokotnice na bazno ploskev pa je naključna (glej sliki 2 in 8). Valovno dolžino vpadnega žarka določimo z generiranjem naključne vrednosti lomnega količnika na intervalu $[n_r, n_v]$ z enakomerno porazdelitvijo, kar pomeni, da je vsaka vrednost na tem intervalu enako verjetna. Lomni količnik za ustrezno snov generiramo na intervalu med mejnimi vrednostmi lomnega količnika v vidnem delu spektra, pri čemer je lomni količnik za rdečo svetlobo n_r , za vijolično pa n_v .

Najprej smo predpostavili, da so bazne ploskve kristala poravnane s horizontalno ravnino. V tem primeru vpadni žarek oklepa kot Σ z baznimi ploskvami, pri čemer je Σ kotna višina sončevega diska na nebu. Izbrali smo, da je vrednost tega kota 11° , kot pri fotografiranem haloju. Nato smo upoštevali, da so bazne ploskve kristala nagnjene pod majhnim kotom Φ glede na horizontalno ravnino. Ta sprememba vpliva na vrednost kota Σ , saj je ta določen med vpadnim žarkom in horizontalno ravnino, ki se v tem primeru ne ujema z bazno ploskvijo kristala. To spremembo upoštevamo tako, vrednosti kota Σ dodamo vrednost kota Φ . Poljubno vrednost kota Φ najprej generiramo na intervalu $[-\chi, \chi]$ z enakomerno porazdelitvijo, nato pa še z normalno porazdelitvijo, pri čemer je pričakovana vrednost $\Phi = 0^\circ$, standardna deviacija pa χ .

Naključno orientacijo kristala okoli pravokotnice na bazno ploskev določimo z generiranjem vrednosti Eulerjevega kota θ na intervalu $[0, \pi/2]$ z enakomerno porazdelitvijo. Dobljeno vrednost pripišemo vpadnemu kotu θ_1 in z enačbo (2) določimo njegovo ortogonalno projekcijo (θ_1^B) na Bravaisovo ravnino. Z enačbo (6) izračunamo vrednost lomnega kota θ_2^B . Nato izračunamo Fresnelove koeficiente odbojnosti za fiktivne žarke na meji zrak – led. Dobljene vrednosti uporabimo, da izračunamo odbojnosti za transverzalno električno in transverzalno magnetno valovanje (glej enačbi (28) in (29)). Njuna aritmetična sredina je odbojnost (R_1) nepolarizirane svetlobe pri vpadu na mejo zrak – led v točki L_1 (glej sliko 4).

Vpadni žarek nepolarizirane svetlobe v točki L_1 se bo z verjetnostjo R_1 odbil in z verjetnostjo $1 - R_1$ lomil v kristal. Zato generiramo naključno število Z_1 na intervalu $[0, 1]$ z enakomerno porazdelitvijo. Če je izpolnjen pogoj $R_1 \geq Z_1$, se žarek odbije v točki L_1 . V tem primeru se vrnemo na začetek programa in ustvarimo novo orientacijo kristala. Če je izpolnjen pogoj $1 - R_1 \geq Z_1$, žarek vstopi v kristal. Če je vpadni kot θ_3^B večji od mejne vrednosti θ_m^B , ki jo določa enačba (10), se žarek odbije v notranjosti kristala. V tem primeru se vrnemo na začetek

programa in ustvarimo novo orientacijo kristala. V nasprotnem primeru po enačbi (11) izračunamo lomni kot θ_4^B . Vrednosti kotov θ_3^B in θ_4^B uporabimo za izračun Fresnelovih odbojnih koeficientov na meji led – zrak. Upoštevamo dobljene vrednosti koeficientov v enačbah (28) in (29) in izračunamo odbojnosti $R_{\perp}$ in $R_{\parallel}$. Njuna aritmetična sredina je odbojnost (R_2) nepolarizirane svetlobe pri vpadu na mejo led – zrak v točki L_2 . Na intervalu $[0,1]$ generiramo novo število Z_2 z enakomerno porazdelitvijo in določimo, ali se žarek v točki L_2 odbije ali lomi. V primeru odboja se vrnemo na začetek in ustvarimo novo orientacijo kristala. V nasprotnem primeru določimo koordinate točke S_2 na podlagi enačb (18) in (19). Dobljene vrednosti pretvorimo v stopinje tako, da jih pomnožimo s $180^\circ/\pi$.

Pri določanju koordinat (y, z) v poglavju 2.1 smo predpostavili, da je kristal neskončno majhen, sončev disk pa je točkovni vir svetlobe. Da bi bile simulacije bolj realistične, moramo upoštevati še, da sončev disk vidimo pod zornim kotom $\rho = 0.5^\circ$. Sončev disk aproksimiramo s kvadratom, katerega stranice so enake zornem kotu sončevega diska. Na intervalu $[-\rho/2, \rho/2]$ generiramo števili Y in Z z enakomerno porazdelitvijo in ju dodamo izračunanima koordinatama y in z . Celoten postopek ponavljamo, dokler ne dobimo dovolj velika števila točk. Pri risanju dobljenih točk na grafu, vsaki točki dodelimo barvo na podlagi vrednosti lomnega količnika, ki je za njo generiran. To storimo tako, da vrednosti lomnega količnika vseh točk postavimo v zaporedje števil in nanj uporabimo funkcijo *rainbow colormap* iz knjižnice *matplotlib*. Ta funkcija preslika člene zaporedja v barvne odtenke, pri čemer najnižji vrednosti zaporedja dodeli rdečo barvo, najvišji vrednosti zaporedja pa vijolično barvo.

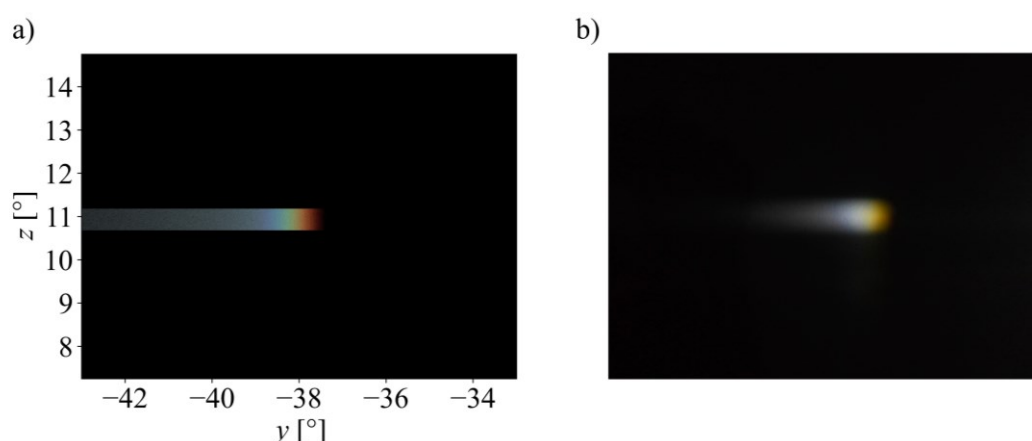
4 Analiza rezultatov

Najprej bomo primerjali rezultate eksperimenta in simulacije Monte Carlo. Da bi bili rezultati kompatibilni, smo enega od začetnih korakov simulacije Monte Carlo prilagodili eksperimentalnim pogojem. Lomni količnik smo generirali na intervalu med mejnimi vrednostmi lomnega količnika akrilnega stekla v vidnem delu spektra. Za rdečo svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 703$ nm je lomni količnik akrilnega stekla $n = 1,488$, za vijolično svetlobo z valovno dolžino $\lambda = 436$ nm pa je $n = 1,502$ [27].

Omenimo še, da smo pri določanju koordinat presečišča žarka in nebesne krogle v poglavju 2.1 najprej določili presečišče enotske krogle in žarka, nato pa smo presečišče projicirali na vertikalno ravnino grafa. Po drugi strani pa se v eksperimentalnem delu žarek po lomu skozi kristal projicira neposredno na zaslon, torej na vertikalno ravnino. Zaradi različnih projekcij se lahko pojavijo odstopanja med meritvami in napovedmi metode Monte Carlo. Različne projekcije lahko vplivajo na obliko haloja in njegovo oddaljenost od vira svetlobe. Odstopanje je zelo izrazito za primere velikih vrednosti kota Σ . Ker smo mi izbrali, da je $\Sigma = 11^\circ$, kot pri fotografiranem haloju, lahko pričakujemo, da različne projekcije ne bodo imele velikega vpliva na obliko haloja.

Slika 9a prikazuje rezultat simulacije Monte Carlo. Spomnimo se, da vsaka točka grafa predstavlja en žarek, ki bi zapustil ravnino grafa in zadel oko navideznega opazovalca. Lokalna

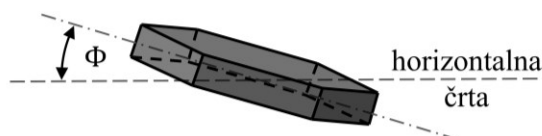
gostota točk predstavlja intenziteto svetlobe. Koordinate vira svetlobe so $(0, \Sigma)$, kjer je $\Sigma = 11^\circ$. Simulirani parhelij se nahaja na isti kotni višini kot vir svetlobe in je rdeče obarvan najbližje viru svetlobe. Za njim se vleče sled bele barve, katere intenzivnost se z večanjem oddaljenosti od vira svetlobe zmanjšuje. Slika 9b prikazuje rezultat eksperimenta. Na fotografiji žarki niso bili posneti neposredno po lomu skozi kristal, ampak po sipanju na hrapavi površini zaslona. To lahko vpliva na motnost parhelija. Opazimo, da je rdeča barva spet najbližje viru svetlobe in da je za njo sled bele barve, katere jakost svetlobe z razdaljo upada. Na podlagi priloženega lahko sklepamo, da se rezultati eksperimenta in Monte Carlo simulacije ujemajo.



Slika 9. a) Monte Carlo simulacija in b) fotografija eksperimentalno ustvarjenega parhelija, ki nastane zaradi loma svetlobe skozi šestkotno ploščo iz akrilnega stekla za vrednost $\Sigma = 11^\circ$. Koordinati y in z določata položaj žarka na zaslonu po lomu skozi kristal.

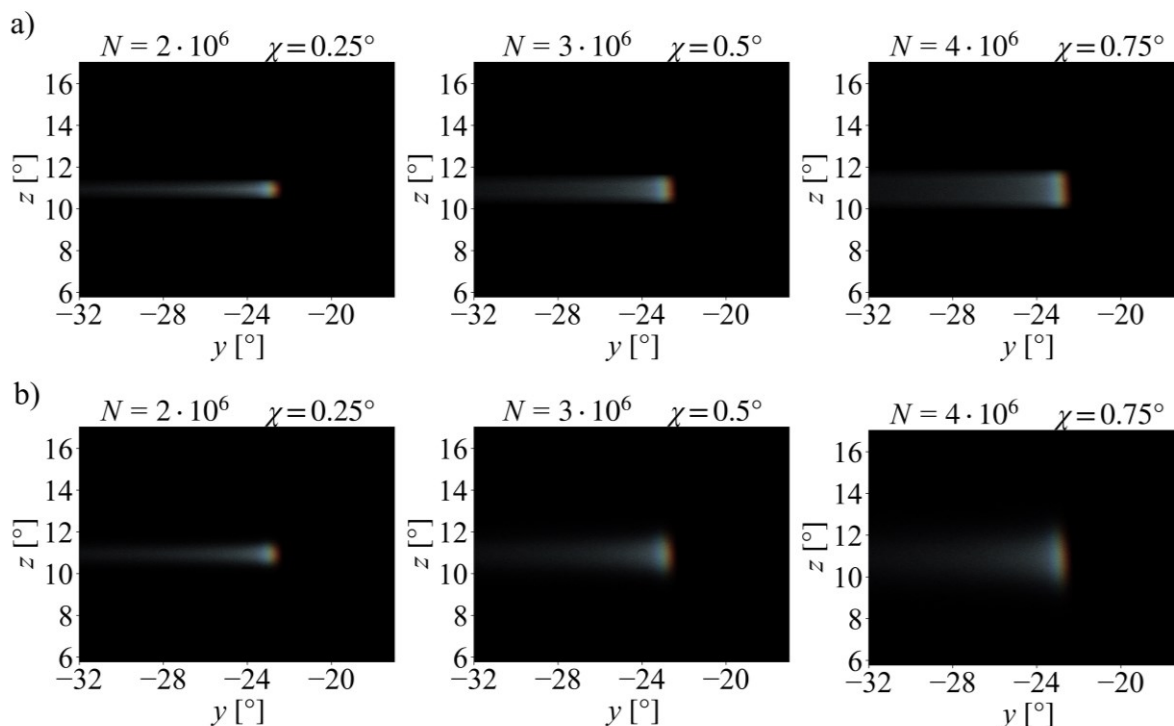
Zdaj lahko primerjamo rezultate, dobljene z modelom kristala in numerično napovedjo simulacije Monte Carlo, z halojem na sliki 1. Glede na razporeditev barv glede na vir svetlobe lahko sklepamo, da se popolnoma ujemajo. Vendar opozorimo, da so robovi haloja s slike 1 bolj zaobljeni v primerjavi s kvadratnimi robovi parhelija s slike 9a in 9b.

V 2. poglavju smo predpostavili, da ima Eulerjev kot φ fiksno vrednost 0° , kar pomeni, da so bazne ploskve kristala idealno poravnane s horizontalno ravnino. Vendar pa lahko zaradi lokalnih nihanj temperature in tlaka, Brownovega gibanja, medsebojnih trkov in nepopolnih kristalnih oblik pričakujemo, da se bodo bazne ploskve postavile pod majhnim kotom Φ glede na horizontalno ravnino, kot je prikazano na sliki 10 [4,7,19].



Slika 10. Bazne ploskve kristala lahko s horizontalno ravnino oklepajo majhen kot Φ .

Poljubno vrednost kota Φ smo najprej generirali na intervalu $[-\chi, \chi]$ z enakomerno porazdelitvijo, nato pa še z normalno porazdelitvijo, pri čemer je pričakovana vrednost $\Phi = 0^\circ$, standardna deviacija pa χ . Simulacije smo izvedli za tri vrednosti kota χ , in sicer $0,25^\circ$, $0,5^\circ$ in $0,75^\circ$. Z večanjem χ se povečuje tudi površina, po kateri se razporedijo žarki po lomu skozi kristal. Intenziteta svetlobe je odvisna od gostote žarkov, zato sprememba vrednosti kota χ vpliva na intenziteto parhelija, če je število vpadnih žarkov konstantno. Da bi bila intenziteta svetlobe simuliranega parhelija približno konstantna, smo s povečanjem kota χ povečali tudi število (N) vpadnih žarkov. Dobljeni rezultati so prikazani na sliki 11.

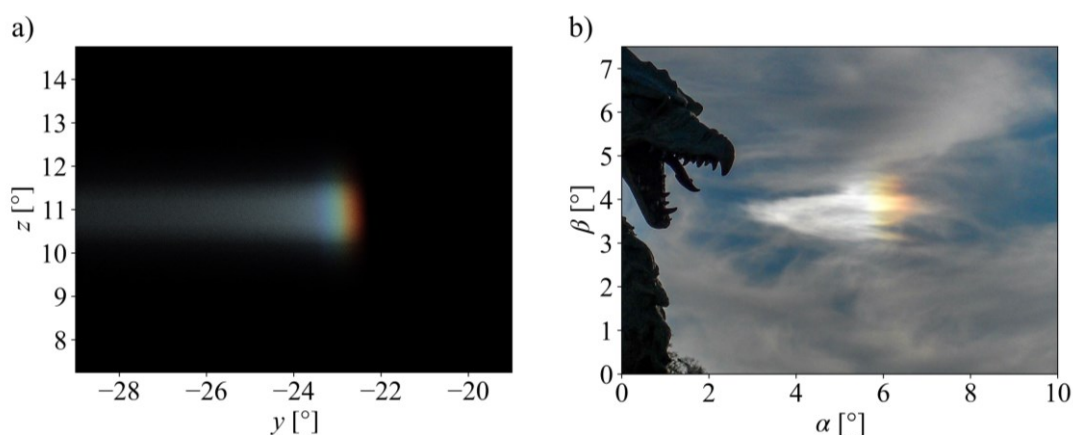


Slika 11. Rezultati Monte Carlo simulacije parhelija ob različnih pogojih. Koordinati y in z določata položaj žarka na zaslonu po lomu skozi kristal. Bazne ploskve kristala oklepajo kot Φ s horizontalno ravnino. a) Vrednost kota Φ je generirana N -krat na intervalu $[-\chi, \chi]$ z enakomerno porazdelitvijo, pri čemer je χ največja možna vrednost kota Φ . b) Vrednost kota Φ je generirana N -krat z normalno porazdelitvijo, pri čemer je pričakovana vrednost 0° , standardna deviacija pa je enaka χ .

Spomnimo se, da je kotna dolžina haloja na sliki 1 približno 4° , kotna širina pa približno 2° . Vse simulacije napovejo, da bi morala biti kotna dolžina tega haloja do štirikrat večja. Vendar je v simulacijah upoštevana samo svetloba, ki se je lomila skozi kristal. Na fotografiji pa je dodatno prisotna tudi osvetlitev ozadja, ki nastane zaradi Rayleighovega sipanja sončeve svetlobe na oblakih in aerosolih. To pomeni, da na fotografiji lahko opazimo le tisti del haloja, katerega intenziteta svetlobe je večja od intenzitete ozadja. Prav tako smo v simulaciji upoštevali le lom skozi en kristal, čeprav se lahko žarek lomi skozi več kristalov preden vpadе v oko opazovalca. Na koncu še izpostavimo, da halo v naravi lahko nastane na točno določeni razdalji od sončevega diska, če je ta del neba pokrit z ustrezno populacijo kristalov. Manjkajoči

del simuliranega pojava morda ni viden na fotografiji s slike 1, ker na tem delu neba ni bilo kristalov ustrezne oblike, dimenzije in orientacije [28,29].

Glede na obliko, intenziteto svetlobe in kotno širino lahko zaključimo, da haloju s slike 1 najbolj ustrezajo simulacije kristalov s $\chi = 0,5^\circ$. Populacija kristalov z normalno porazdelitvijo kota χ tvori obliko, podobno haloju s slike 1. Vendar simulacija kaže, da intenziteta svetlobe belega traku prehitro upada, za razliko od fotografije, na kateri je intenziteta svetlobe vzdolž celotnega haloja približno konstantna. Bolj ustrezno intenziteto svetlobe daje simulacija z enakomerno porazdelitvijo. Na podlagi tega lahko domnevamo, da je halo s slike 1 nastal zaradi loma svetlobe skozi dve populaciji kristalov. Prvo populacijo predstavljajo kristali z normalno porazdelitvijo, ki določajo pravilno obliko haloja. Drugo populacijo sestavljajo kristali z enakomerno porazdelitvijo, ki prispevajo k bolj realistični intenziteti svetlobe. Izvedli smo več simulacij z različno zastopanostjo teh dveh populacij kristalov in dobili najboljši rezultat, ko je bila prva populacija kristalov dvakrat številčnejša od druge. Rezultat simulacije je prikazan na sliki 12a.



Slika 12. a) Monte Carlo simulacija parhelija, ki nastane zaradi loma svetlobe skozi dve populaciji kristalov. Koordinati y in z določata položaj žarka na zaslonu po lomu skozi kristal. b) Fotografija haloja, s katerim primerjamo rezultat Monte Carlo simulacije. Kotna dolžina in širina fotografije sta α in β .

5 Zaključek

V diplomskem seminarju smo preverili hipotezo, da parhelij, ki je oblika sončevega haloja, nastane z dvojnim lomom svetlobe skozi ploskvi kristala, ki oklepata kot 60° . Najprej smo določili, kako je v horizontalni ravnini odklon svetlobe po lomu skozi kristal odvisen od vpadnega kota (enačba (13)). Odklon ima minimalno vrednost, ki je odvisna od lomnega količnika in s tem od valovne dolžine svetlobe (slika 5). Določili smo odklonski kot za mejne vrednosti vidnega dela spektra in ugotovili, da je za rdečo svetlobo $\delta_{min} = 21,7^\circ$, medtem ko je za vijolično $\delta_{min} = 22,4^\circ$. Tako smo lahko pojasnili, zakaj je centralni del haloja na sliki 1 bele barve, medtem ko je desni rob, ki je najbližji sončevemu disku, rdeče barve.

Nato smo dobljene rezultate uporabili v Monte Carlo simulaciji in z njo določili obliko parhelija ter njegov položaj na nebu. Intenziteto svetlobe parhelija smo simulirali tako, da smo

vsaki smeri vpadne svetlobe na podlagi njene intenzitete po lomu pripisali verjetnost, da bo kot svetla pika prikazana na grafu. Rezultat dobljen z metodo Monte Carlo smo primerjali z rezultatom eksperimenta, v katerem smo opazovali lom svetlobe skozi model kristala iz akrilnega stekla. Glede na videz parhelija in njegov položaj glede na vir svetlobe smo ugotovili, da se rezultati, pridobljeni eksperimentalno in z metodo Monte Carlo, ujemajo (slika 9). Po tem, ko smo se prepričali, da Monte Carlo simulacija daje zadovoljive rezultate, smo simulirali parhelij, ki nastane z lomom svetlobe skozi kristale ledu. Izkazalo se je, da dobimo bolj realistične simulacije, če upoštevamo, da lahko bazne ploskve oklepajo majhen kot Φ z horizontalno ravnino. Simulacije smo izvedli za dve populaciji kristalov. Prvi populaciji smo vrednosti kota Φ generirali z normalno porazdelitvijo, drugi populaciji pa z enakomerno porazdelitvijo. Halo pojavo s slike 1 najbolj ustreza simulacija parhelija, ki nastane z lomom svetlobe skozi obe populaciji kristalov, pri čemer je prva populacija dvakrat številčnejša od druge (slika 12).

Rezultati, pridobljeni eksperimentalno in numerično z metodo Monte Carlo, so se ujemali, ker smo uporabili majhno vrednost kotne višine sončevega diska na nebu. Pri večjih vrednostih tega kota bi zaradi projekcije na vertikalno ravnino bil parhelij v eksperimentu na drugačni višini kot vir svetlobe. V prihodnosti bi lahko Monte Carlo simulacijo prilagodili pogojem eksperimenta tako, da bi po lomu skozi kristal določili projekcijo žarka neposredno na vertikalno ravnino. Lahko pa bi pogoje eksperimenta prilagodili Monte Carlo simulaciji, tako da lom svetlobe ne bi obravnavali na vertikalni ravnini, temveč na površini sfere [30].

V eksperimentu smo uporabili model kristala iz akrilnega stekla, ki ima višji lomni količnik kot led. To predstavlja pomembno omejitev eksperimenta, saj zaradi različnega lomnega količnika ni mogoče oblikovati drugih vrst halojev, ki nastanejo iz iste populacije kristalov kot parhelij [21]. V prihodnje bi lahko to težavo rešili tako, da bi kalup kristala iz akrilnega stekla napolnili z vodo [31]. Še bolj preprosto pa bi bilo, da bi vrteči se kristal nadomestili s statičnim valjem, napolnjenim z vodo, v katerem je neprozoren valj z dvakrat manjšim polmerom [32].

Za bolj realistične rezultate eksperimenta in Monte Carlo simulacije bi v prihodnosti lahko uporabili različne vrste virov svetlobe. V eksperimentalnem delu bi lahko namesto LED svetilke uporabili vir svetlobe, katerega spekter bi se bolj ujemal s spektrom sončeve svetlobe. V Monte Carlo simulaciji smo izbirali valovno dolžino svetlobe z generiranjem vrednosti lomnega količnika z enakomerno porazdelitvijo. Izgled simuliranega parhelija bi bil bolj realističen, če bi lomni količnik generirali glede na porazdelitev, ki približno ustreza spektru sevanja črnega telesa pri temperaturi Sonca. Poleg tega bi lahko Monte Carlo simulacijo še dodatno izboljšali, če bi upoštevali absorpcijo svetlobe v kristalu ter možnost, da svetloba na poti od vira do opazovalca preide skozi več kot en kristal [33-35].

V prihodnosti bi lahko halo pojavi imeli veliko vlogo pri raziskovanju atmosfer drugih planetov. Na podlagi videza haloja in njegove oddaljenosti od svetlobnega vira je mogoče določiti obliko kristalov, ki so ga ustvarili [15-17]. Prisotnost določenih oblik kristalov lahko nakazuje na pogoje, ki morajo biti v atmosferi, da bi takšna vrsta kristalov lahko nastala [18]. Te vsebine presegajo obseg tega seminarja, a predstavljajo izvrstno izhodišče za nadaljnje delo.

Literatura in viri

- [1] R. Greenler, *Rainbows, Halos and Glories* (Cambridge University Press, England, 1980).
- [2] W. Tape, *Atmospheric Halos* (American Geophysical Union, Washington, D.C., 1994).
- [3] W. Tape, J. Moilanen, *Atmospheric Halos and the Search for Angle x* (American Geophysical Union, Washington, D.C., 2006).
- [4] R. A. R. Tricker, *Introduction to Meteorological Optics* (Mills & Boon, London, 1970).
- [5] A. Wegener, *Theorie der Hauptalos* (L. Friederichsen & Co, Hamburg, 1926).
- [6] K. Liou, P. Yang, *Light Scattering by Ice Crystals* (Cambridge University Press, United Kingdom, 2016).
- [7] W. J. Humphreys, *Physics of the Air* (McGraw-Hill, New York, 1929).
- [8] L. Cowley, *Atmospheric Optics*. Pridobljeno 15.8.2024, iz <https://old.atoptics.co.uk/index.htm>.
- [9] W. Tape, *Streetlight Halos*. Pridobljeno 15.8.2024, iz <https://scholarworks.alaska.edu/handle/11122/9705?show=full>.
- [10] *Atmospheric Optics, Reflected Town Map*, Pridobljeno 15.8.2024, iz <https://old.atoptics.co.uk/fza68.htm>.
- [11] W. Tape, E. Seidenfaden in G. P. Können, *The legendary Rome halo displays*, Appl. Opt. **47**, H72 (2008).
- [12] E. Seidenfaden, *Found: a diagram of the 1630 Rome halo display*, Appl. Opt. **50**, F60 (2011).
- [13] A. Bravais, *Mémoire sur les halos et les phénomènes optiques qui les accompagnent*, J. École R. Polytech. **31** (1847).
- [14] F. Pattloch in E. Tränkle, *Monte Carlo simulation and analysis of halo phenomena*, J. Opt. Soc. Am. **1**, 520 (1984).
- [15] G. P. Können, *Symmetry in halo displays and symmetry in halo-making crystals*, Appl. Opt. **42**, 318 (2003).

- [16] M. Riikonen, M. Sillanpää, L. Virta, D. Sullivan, J. Moilanen in I. Luukkonen, *Halo observations provide evidence of airborne cubic ice in the Earth's atmosphere*, Appl. Opt. **39**, 6080 (2000).
- [17] G. P. Können, A. A. Schoenmaker in J. Tinbergen, *A Polarimetric Search for Ice Crystals in the Upper Atmosphere of Venus*, Icarus **102**, 62 (1993).
- [18] E. Whalley in G. E. McLaurin, *Refraction halos in the solar system. I. Halos from cubic crystals that may occur in atmospheres in the solar system* J. Opt. Soc. Am. A **1**, 1166 (1984).
- [19] J. I. Katz, *Subsuns and Low Reynolds Number Flow*, J. Atmos. Sci. **55**, 3358 (1998).
- [20] S. G. Warren, *Optical constants of ice from the ultraviolet to the microwave*, Appl. Opt. **23**, 1206 (1984).
- [21] M. Selmke, *Artificial circumzenithal and circumhorizontal arcs*, Am. J. Phys. **85**, 575 (2017).
- [22] S. R. Marschner, H. W. Jensen, M. Cammarano, S. Worley in P. Hanrahan, *Light Scattering from Human Hair Fibers*, ACM Trans. Graph. **22**, 780 (2003).
- [23] A. N. Matveev, *Optics* (Mir Publishers, Moscow, 1988).
- [24] M. Großmann, K. P. Möllmann in M. Vollmer, *Artificially generated halos: rotating sample crystals around various axes*, Appl. Opt. **54**, B97 (2015).
- [25] M. Vollmer, R. Tammer, *Laboratory experiments in atmospheric optics*, Appl. Opt. **37**, 1557 (1998).
- [26] Digital Camera Database, *Nikon Coolpix S2500*, Pridobljeno 15.8.2024, iz https://www.digicamdb.com/specs/nikon_coolpix-s2500/.
- [27] N. Sultanova, S. Kasarova in I. Nikolov, *Dispersion Properties of Optical Polymers*, Acta Physica Polonica A **116**, 585 (2009).
- [28] M. I. Mishchenko in A. Macke, *How big should hexagonal ice crystals be to produce halos?*, Appl. Opt. **38**, 1626 (1999).
- [29] A. J. Weinheimer, *What size of ice crystals causes the halos?*, J. Opt. Soc. Am. **69**, 1112 (1979).
- [30] M. Selmke, S. Selmke, *Complex artificial halos for the classroom*, Am. J. Phys. **84** (2016).
- [31] M. Selmke, *Artificial halos*, Am. J. Phys. **83**, 751 (2015).

- [32] W. Tape, *When Huygens and Mariotte agree*, Appl. Opt. **47**, H85 (2008).
- [33] Q. Mu, E. G. Kablukova, B. A. Kargin in S. M. Prigarin, *Monte Carlo simulation of halos in the crystal clouds*, J. Phys.: Conf. Ser. **2099**, 012067 (2021).
- [34] S. D. Gedzelman, *Approach to photorealistic halo simulations*, Appl. Opt. **50**, F102 (2011).
- [35] S. D. Gedzelman, *Simulating rainbows and halos in color*, Appl. Opt. **33**, 4607 (1994).