



Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Vsiljeno sklopljeno nihanje

Diplomski seminar na študijskem programu 1. stopnje Fizika

Jan Žnidarič

Mentor: doc. dr. Robert Hauko

Maribor, 2022

ŽNIDARIČ, J.: Vsiljeno sklopljeno nihanje

Diplomski seminar, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, 2022.

POVZETEK

V diplomskem seminarju teoretično in eksperimentalno raziščemo pojav vsiljenega sklopljenega nihanja. Z eksperimentom potrdimo, da ima resonančna krivulja sklopljenega nihala dva vrhova. Računsko in eksperimentalno določimo lastne krožilne frekvence ter koeficiente dušenja. Dokažemo, da ima resonančna krivulja dva vrhova, ki pri zmernem dušenju ležita v bližini lastnih frekvenc sistema nihal. Pokažemo, da pri večini vsiljenih frekvenc nihata obe nihali bodisi v fazi, bodisi v protifazi. Ustvarimo lasten numerični model vsiljenega sklopljenega nihanja, ki omogoča potrditev osnovnih značilnosti pojava in primerjavo rezultatov eksperimentov z modelskimi rešitvami.

Ključne besede: vsiljeno nihanje, resonanca, sestavljeno nihalo, vsiljeno sklopljeno nihanje.

ABSTRACT

In this seminar, we theoretically and experimentally investigate the phenomenon of forced coupled oscillation. We experimentally confirmed that the resonance curve of the coupled pendulum has two peaks. Analytically and experimentally we determined the eigen frequencies and damping coefficients. We prove that the resonance curve has two peaks that lie near the eigen frequencies of the pendulum system, when exposed to a low damping force. We show that at majority of driving frequencies both pendulums oscillate either in phase or out of phase. We create our own numerical model of forced coupled oscillation. This allows us to confirm the basic characteristics of the phenomenon and compare the results of experiments with model solutions.

Key words: forced oscillation, resonance, compound pendulum, forced coupled oscillation.

Kazalo vsebine

1	Uvod	1
2	Teoretične osnove.....	2
2.1	Vsiljeno nihanje in resonanca	2
2.2	Sklopljeno nihanje.....	4
2.3	Vsiljeno sklopljeno nihanje.....	5
3	Model – numerični izračun.....	8
4	Eksperiment.....	9
5	Rezultati.....	11
5.1	Resonanca enega nihala	11
5.2	Lastno sklopljeno nihanje dveh nihala.....	15
5.3	Vsiljeno sklopljeno nihanje – šibko dušenje.....	16
5.4	Vsiljeno sklopljeno nihanje – močno dušenje.....	21
6	Zaključek	24

1 Uvod

Kadar nihalu vsiljujemo nihanje z zunanjo periodično silo, začne po določenem času nihati s frekvenco vsiljevanja, amplituda nihala pa se več ne spreminja. Resonančna krivulja prikazuje odvisnost amplitude nihanja od frekvence vsiljevanja. Njen vrh se nahaja v bližini lastne frekvence in je tem ostrejši, čim manjše je dušenje.

Ko dve ali več nihal povežemo med seboj s prožnimi vzmetmi, dobimo sistem sklopljenih nihal (sestavljeno nihanje). V fizikalnih učbenikih in gradivih v splošnem najdemo osnovne značilnosti sistema dveh enakih sklopljenih nihal [1-3]. Sistem dveh sklopljenih nihal ima dve lastni frekvenci. Časovna odvisnost odmika posameznega nihala je v splošnem linearna kombinacija nihanj z lastnima frekvencama. Pri preprostejših postavitvah nihal lahko lastni frekvenci določimo tudi eksperimentalno. Za eksperimentalno določanje lastnih frekvenc izberemo takšne začetne pogoje, da sklopljen sistem nihal niha v enem izmed lastnih načinov. Nihali nihata v fazi, ki je prav tako odvisna od začetnih pogojev in se med nihanjem ne spreminja. V večini univerzitetnih fizikalnih učbenikov pa ne najdemo opisa vsiljenega nihanja sistema sklopljenih nihal [1-7]. Pomanjkanje informacij v učbenikih me je motiviralo, da v okviru diplomskega seminarja vsiljeno nihanje sistema sklopljenih nihal podrobneje raziščem.

Primer sklopljenega vsiljenega nihanja sta računsko analizirala že Foulaadvand in Masoumi [8] in izpeljala enačbe za amplitudo posameznega matematičnega nihala ter fazo med matematičnima nihalom. Case in sodelavci [9] so računsko in eksperimentalno obravnavali primer masno-vzmetnega nihala, ki mu vsiljujejo nihanje. Sistem poljubno mnogih z vzmetjo povezanih nihal so analitično obravnavali Belbasi, Foulaadvand in Yong [10]. Jensen [11] je demonstriral, kako se obnašajo povezani nelinearni oscilatorji, katerim vsiljujemo nihanje s silo, ki se spreminja s časom.

Cilj diplomske naloge je določitev resonančne krivulje za vsako od nihal. Zunanji periodični sili smo spreminjali frekvenco in merili odmik posameznega nihala v odvisnosti od časa. Raziskovanja smo se lotili eksperimentalno in teoretično. Eksperimentalne ugotovitve smo skušali potrditi z rezultati lastne modelske simulacije in z rezultati, objavljenimi v raziskavi [8]. Na začetku raziskovalnega dela smo postavili dve osnovni hipotezi. Pričakovali smo, da bo imela resonančna krivulja sistema sklopljenih nihal dva vrha, ki naj bi sovpadala z njunima lastnima frekvencama. Pričakovali smo tudi, da bosta nihali nihali na enega od lastnih nihajnih načinov - bodisi v fazi, bodisi v protifazi.

V nadaljevanju bomo v 2. poglavju opisali teoretične osnove vsiljenega nihanja, značilnosti sklopljenega nihala in vsiljenega sklopljenega nihanja. V 3. poglavju bomo predstavili numeričen program, s katerim simuliramo pojav vsiljenega sklopljenega nihanja. V 4. poglavju opišemo eksperiment in nato v 5. poglavju rezultate eksperimenta.

2 Teoretične osnove

V tem poglavju najprej obravnavamo vsiljeno nihanje in odvisnost amplitude nihala od frekvence vsiljevanja, nato opišemo značilnosti sklopljenega nihala. Na koncu poglavja oboje združimo v opis vsiljenega sklopljenega nihanja.

2.1 Vsiljeno nihanje in resonanca

Fizikalno nihalo je poljubno tego telo, vpeto na nihajno os, ki ne poteka skozi njegovo težišče (slika 1a). Če so odmiki od ravnovesne lege dovolj majhni in nihanje ni dušeno, bo nihalo nihalo z lastno krožilno frekvenco (ω_0) in z lastnim nihajnim časom (T_0):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}}, \quad (1)$$

kjer je J vztrajnostni moment nihala glede na os vrtenja, g gravitacijski pospešek, m masa telesa in d razdalja med težiščem nihala in osjo vrtenja.

Če fizikalnemu nihalu vsiljujemo nihanje z zunanjim periodičnim navorom z amplitudo M_0 in frekvenco vsiljevanja ω_v , zasuk nihala iz ravnovesne lege opiše gibalna enačba:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + 2\beta \frac{d\phi}{dt} + \omega_0^2 \phi = \frac{M_0}{J} \sin(\omega_v t + \gamma), \quad (2)$$

kjer je ϕ odklik od ravnovesne lege, t čas, β koeficient dušenja in γ začetna faza nihanja zunanjega navora. Enačba (2) je linearna (navadna) diferencialna enačba drugega reda, njena splošna rešitev $\phi(t)$ pa je vsota rešitve homogenega dela (ϕ_h) in partikularne rešitve (ϕ_p):

$$\phi_h = (B \sin \omega t + C \cos \omega t) e^{-\beta t}, \quad (3)$$

$$\phi_p = A \sin(\omega_v t + \gamma - \delta), \quad (4)$$

kjer predstavljajo konstante A, B in C amplitude, δ pa je fazna razlika med nihanjem nihala in zunanjega navora v partikularnem delu rešitve. Iz enačbe (3) je razvidno, da homogeni del rešitve s časom zamre, ostane samo partikularni del rešitve. Partikularni del odvajamo po času in vstavimo v enačbo (2) in tako dobimo vrednosti za amplitudo in fazno razliko:

$$A = \frac{M_0}{J \sqrt{(\omega_v^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_v^2}}, \quad (5)$$

$$\delta = \arctan\left(\frac{-2\beta\omega_v}{\omega_v^2 - \omega_0^2}\right). \quad (6)$$

Dobljeni vrednosti za A in δ vstavimo v enačbo (4) in dobimo rešitev enačbe (2):

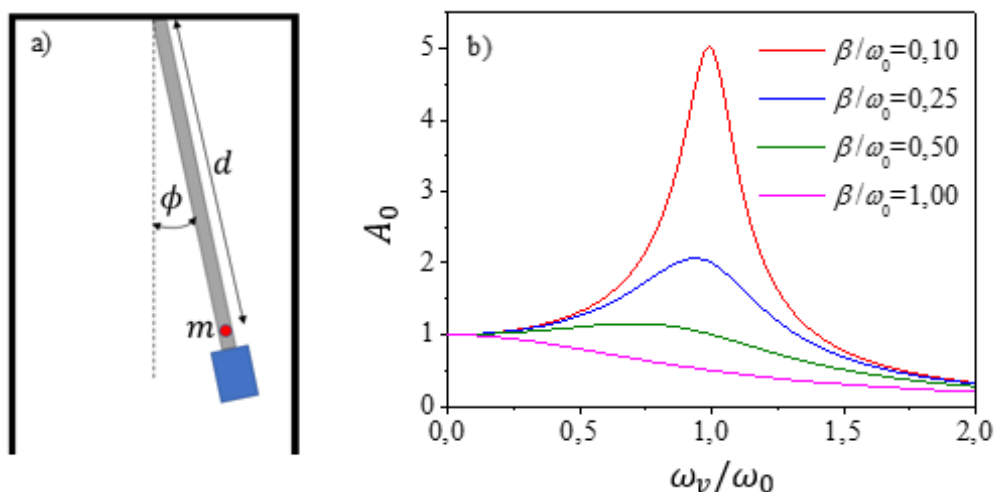
$$\phi(t) = \frac{M_0}{J\sqrt{(\omega_v^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_v^2}} \sin\left(\omega_v t + \gamma - \arctan\left(\frac{-2\beta\omega_v}{\omega_v^2 - \omega_0^2}\right)\right). \quad (7)$$

Enačba (7) je enačba nihanja in opisuje časovno odvisnost zasuka nihala od ravnovesne lege po daljšem času, ko izzvenijo prehodni pojavi.

Iz enačbe (5) vidimo, da je amplituda nihanja odvisna od frekvence vsiljevanja nihanja, kar je prikazano na sliki 1 za različne vrednosti koeficienta dušenja. Čim šibkejšje je dušenje, tem višji in ostrejši je resonančni vrh. Vrh resonančne krivulje se nahaja pri frekvenci, za katero velja $dA/d\omega_v = 0$, od koder sledi:

$$\omega_v = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (8)$$

Pri šibkem dušenju ($\beta \ll \omega_0$) niha nihalo z največjo amplitudo pri frekvenci vsiljevanja, ki je skoraj enaka lastni frekvenci.



Slika 1. a) Skica fizikalnega nihala z maso m in razdaljo d med osjo vrtenja, odklonom iz ravnovesne (ϕ) lege in težiščem. b) Relativna amplituda (A_0), ki je definirana kot $A_0 = A(\omega_v)/A(\omega_v = 0)$, v odvisnosti od razmerja med frekvenco vsiljevanja (ω_v) in lastno frekvenco (ω_0), pri različnih vrednostih koeficienta dušenja (β).

2.2 Sklopljeno nihanje

Če povežemo dve ali več nihalo preko prožnih vzmeti ali trakov, dobimo sistem nihalo, ki niha sklopljeno (povezano). Poiščemo sile, ki delujejo na posamezno nihalo, in navore teh sil, nato za vsako nihalo napišemo gibalno enačbo in dobimo sistem sklopljenih diferencialnih enačb 2. reda. Število enačb je enako številu povezanih nihalo. Rešitev sistema enačb so odmiki posameznih nihalo od ravnovesne lege v odvisnosti od časa [1-3].

V splošnem prevedemo sistem enačb v matrično obliko. Pri reševanju matrične enačbe si pomagamo z iskanjem lastnih vrednosti in ustreznih lastnih vektorjev. Lastne vrednosti ustrezajo lastnim frekvencam sistema, lastni vektorji pa ustreznim začetnim odklonom, pri katerih bo sistem nihalo z eno od lastnih frekvenc. Ker ni nujno, da je matrična enačba rešljiva analitično, jo običajno rešujemo numerično.

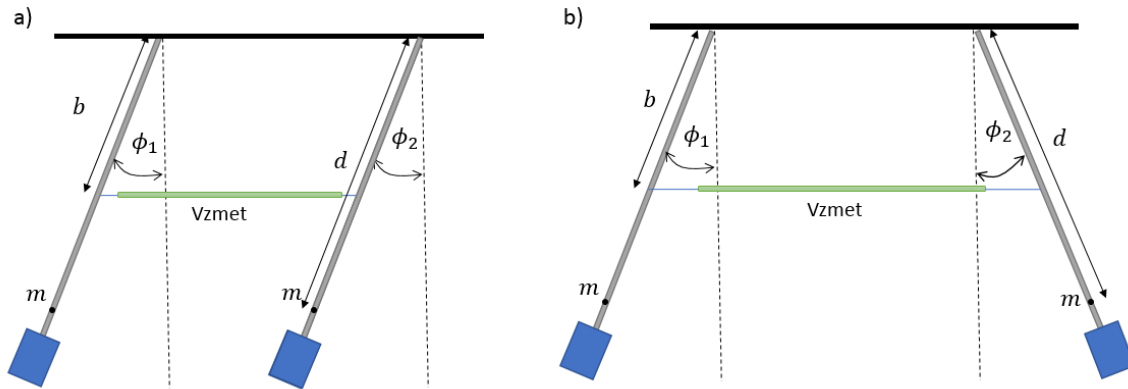
V posebno preprostem primeru sistema dveh enakih nihalo in simetrični postavitvi nihalo, vzmeti ali prožnih trakov lahko izračunamo lastni frekvenci sistema tudi z uvedbo novih spremenljivk, relativne in težiščne koordinate. V primeru dveh fizikalnih nihalo, povezanih z vzmetjo s koeficientom prožnosti k , sta ustrezni lastni krožilni frekvenci [1]:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgd}{J}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{mgd + 2kb^2}{J}}, \quad (9)$$

kjer je b razdalja med pritrdiščem vzmeti in osjo vrtenja. Poseben primer fizikalnega nihala je matematično nihalo, to je nihalo, kjer je vsa masa zbrana v točki na koncu nihala, zato je razdalja d kar enaka dolžini nihala ($d = l$), vztrajnostni moment je $J = ml^2$. Izraza za lastni frekvenci (enačba (9)) se zato poenostavita v:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2kb^2}{ml^2}}. \quad (10)$$

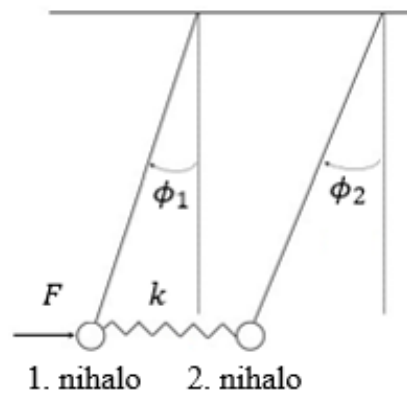
Ne glede na vrsto nihalo je časovni potek odklona posameznega nihala v splošnem linearna kombinacija nihanj z lastnimi frekvencami in je močno odvisen od začetnih pogojev (odklona in hitrosti obeh nihalo). O lastnem nihanju govorimo, kadar nihata obe nihali samo z eno od lastnih frekvenc. V opisanem preprostem (simetričnem) primeru lahko oba lastna nihajna načina dobimo tako, da nihali na začetku odmaknemo za enak kot v isti smeri (prvo lastno nihanje) ali v nasprotni smeri (drugo lastno nihanje) in ju pustimo, da prosto zanihata. Na tak način lahko oba lastna nihajna časa in s tem obe lastni krožilni frekvenci tudi izmerimo (slika 2).



Slika 2. Prikaz začetnih pogojev, pri katerih dobimo lastna nihanja dveh enakih sklopljenih fizikalnih nihal. Vsako od nihal ima maso m , njegovo težišče je oddaljeno za d od nihajne osi, vzmet pa je pripeta na vsako od nihal na razdalji b od osi vrtenja. a) Prvi nihajni način s krožilno frekvenco ω_1 dobimo, ko nihali na začetku odmaknemo za enako velik kot v isti smeri ($\phi_1 = \phi_2$). b) Drugi nihajni način s krožilno frekvenco ω_2 dobimo, ko nihali na začetku odmaknemo za enako velik kot v nasprotnih smereh ($\phi_1 = -\phi_2$).

2.3 Vsiljeno sklopljeno nihanje

Opis vsiljenega sklopljenega nihanja bomo povzeli po [8]. Navedeno raziskovalno delo obravnava dve enaki sklopljeni matematični nihali, kjer enemu nihalu vsiljujemo nihanje s periodično silo (slika 3), to nihalo bomo imenovali 1. nihalo. Nihalo, ki je sklopljeno s 1. nihalom, pa imenujemo 2. nihalo.



Slika 3. Shema vsiljenega sklopljenega nihanja dveh enakih matematičnih nihal, kjer je F sila vsiljevanja nihanja, k konstanta vzmeti, ϕ_1 zasuk od ravnovesne lege 1. nihala in ϕ_2 zasuk od ravnovesne lege 2. nihala. Povzeto po [8].

V primeru periodične zunanje sile in približku majhnih odklikov od ravnovesne lege dobimo za vsako nihalo enačbo gibanja:

$$m \frac{d^2 \phi_1}{dt^2} = -\frac{mg}{l} \phi_1 - k(\phi_1 - \phi_2) - m\Gamma \frac{d\phi_1}{dt} + \frac{F_0 \cos(\omega_v t)}{l} \quad (11)$$

in

$$m \frac{d^2 \phi_2}{dt^2} = -\frac{mg}{l} \phi_2 + k(\phi_1 - \phi_2) - m\Gamma \frac{d\phi_2}{dt}, \quad (12)$$

kjer je F_0 amplituda zunanje sile, ϕ_1 zasuk od ravnovesne lege prvega nihala, ϕ_2 zasuk od ravnovesne lege drugega nihala in $\Gamma = 2\beta$ dušilna konstanta.

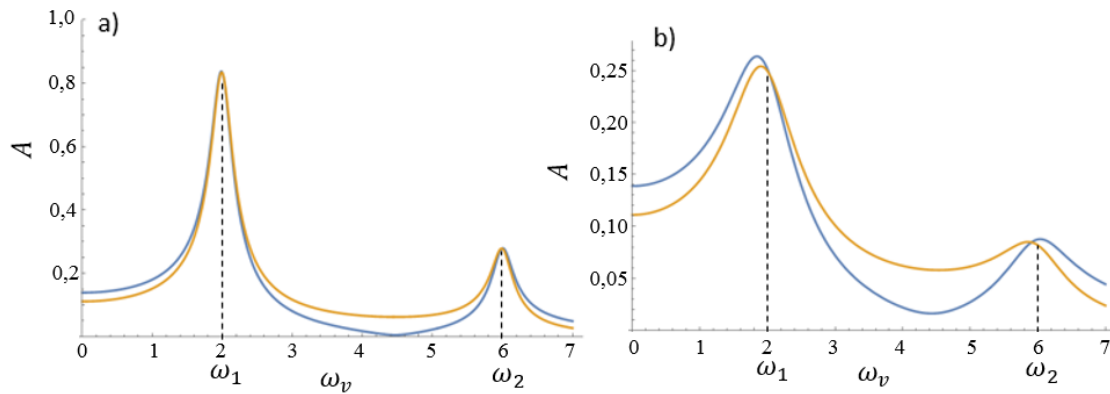
Iz enačb (11) in (12) sta v [8] izpeljani enačbi za amplitudi posameznih nihal (A_1, A_2) v odvisnosti od vsiljene krožilne frekvence:

$$A_1 = \frac{F_0}{2m} \sqrt{\frac{4\omega_v^4 + \omega_1^4 + \omega_2^4 - 4\omega_v^2(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \Gamma^2) + 2\omega_1^2\omega_2^2}{((\omega_1^2 - \omega_v^2)^2 + \Gamma^2\omega_v^2)(\omega_2^2 - \omega_v^2)^2 + \Gamma^2\omega_v^2}} \quad (13)$$

in

$$A_2 = \frac{F_0}{2m} \sqrt{\frac{\omega_1^4 + \omega_2^4 - 2\omega_1^2\omega_2^2}{((\omega_1^2 - \omega_v^2)^2 + \Gamma^2\omega_v^2)(\omega_2^2 - \omega_v^2)^2 + \Gamma^2\omega_v^2}} \quad (14)$$

kjer je A_1 amplituda prvega nihala, A_2 amplituda drugega nihala, ω_1 lastna frekvenca prvega nihajnega načina (10) in ω_2 lastna frekvenca drugega nihajnega načina (2). Na sliki 4 sta prikazani frekvenčni odvisnosti obeh amplitud pri različnih vrednostih dušilne konstante in dveh izbranih lastnih frekvencah. Vpliv dušenja pride še bolj do izraza pri razmerju amplitud med obema nihaloma A_1/A_2 . Na sliki 5 je prikazano to razmerje v odvisnosti od vsiljene frekvence.



Slika 4. Amplituda 1. nihala (A_1), modra krivulja, in 2. nihala (A_2), oranžna krivulja, v odvisnosti od frekvence vsiljevanja ω_v pri a) šibkem dušenju in b) močnem dušenju. V obeh primerih je bil izbran enak par lastnih krožilnih frekvenc (ω_1, ω_2).

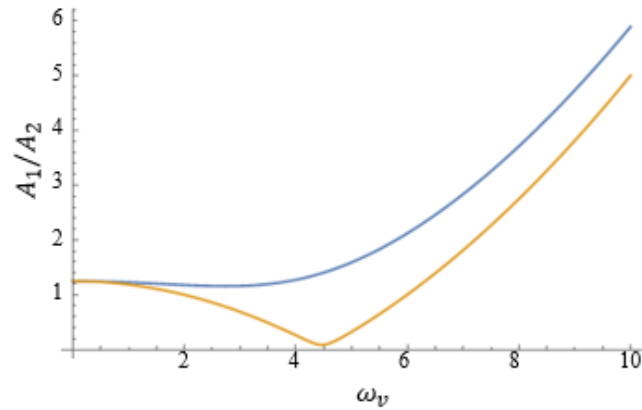
V [8] sta izpeljana tudi izraza za fazno razliko posameznega nihala (δ_1, δ_2) glede na nihanje zunanje sile:

$$\tan \delta_1 = \frac{\Gamma\omega((\omega_1^2 - \omega_v^2)^2 + (\omega_2^2 - \omega_v^2)^2 + 2\Gamma^2\omega_v^2)}{((\omega_1^2 - \omega_v^2)(\omega_2^2 - \omega_v^2) + \Gamma^2\omega^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_v^2)} \quad (15)$$

in

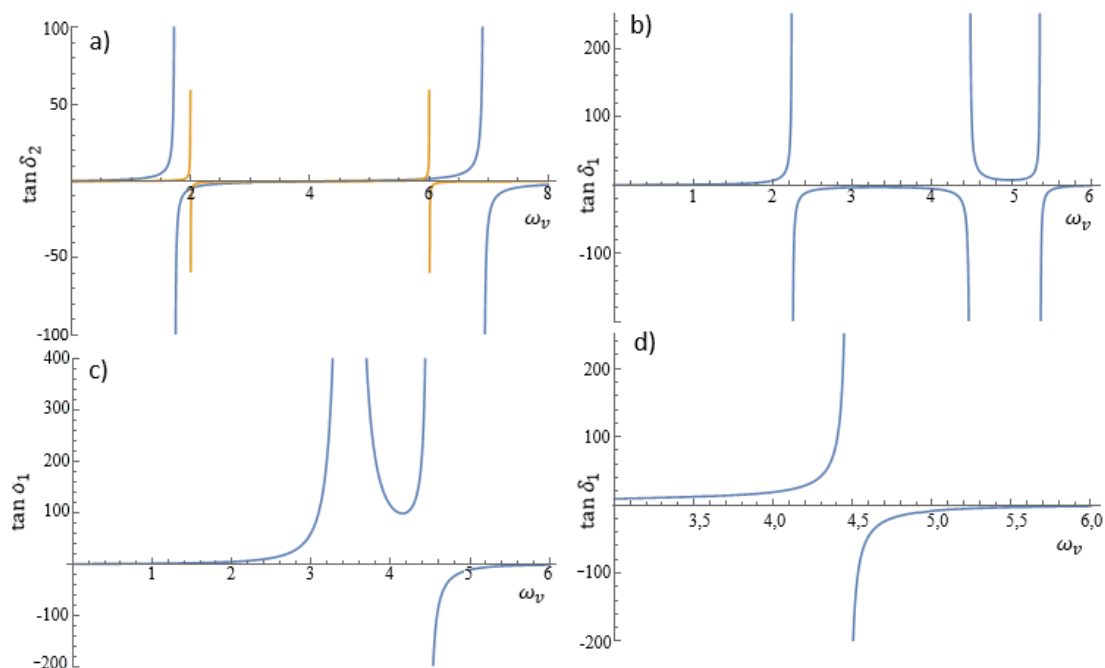
$$\tan \delta_2 = \frac{\Gamma\omega(\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\omega_v^2)}{(\omega_1^2 - \omega_v^2)(\omega_2^2 - \omega_v^2) - \Gamma^2\omega_v^2} \quad (16)$$

Vrednost $\tan \delta$ je priročna za primerjavo izmerjenih faznih razlik s teoretičnimi in za določanje fizikalnih parametrov. Ob tem pa se je treba zavedati, da ima funkcija $y = \tan x$ singularnosti pri argumentih $x = (\pi/2 + z \cdot \pi)$, kjer je z poljubno celo število, in da velja $\tan 0 = \tan \pi = 0$. To pomeni, da bodo vrednosti, izmerjene pri $\delta \sim \pi/2$, obremenjene z veliko mersko napako in da ne bomo več razločili nihanja v fazi od nihanja v protifazi.



Slika 5. Razmerje amplitud obeh nihaj (A_1/A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu šibkega (oranžna krivulja) in močnejšega (modra krivulja) dušenja. V obeh primerih sta bili izbrani enaki lastni krožilni frekvenci kot na sliki 4.

Na sliki 6 lahko vidimo potek funkcij, ki ju opisujeta enačbi (15) in (16). Dušenje različno vpliva na fazno razliko posameznega nihala. Pri drugem nihalu (slika 6b) je učinek dušenja preprostejši kot pri prvem nihalu (slika 6a). Glede na vrednost dušilne konstante v odnosu do razlike lastnih krožilnih frekvenc ($\omega_2 - \omega_1$) obstaja pri slednjem v splošnem pet različnih režimov [8].



Slika 6. Tangens fazne razlike med posameznim nihalom in zunanjo silo (δ_1, δ_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v). a) 2. nihalo pri vrednosti $\Gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$ (oranžna krivulja) in $\Gamma = 3,3 \text{ s}^{-1}$ (modra krivulja). Potek 1. nihala je prikazan pri različnih vrednostih dušenja b) $\Gamma = 0,3 \text{ s}^{-1}$, c) $\Gamma = 4,0 \text{ s}^{-1}$ in d) $\Gamma = 5,2 \text{ s}^{-1}$.

3 Model – numerični izračun

Za fizikalni model vsiljenega sklopljenega nihanja sem uporabil dve enaki matematični nihali, povezani s prožno vzmetjo. Kljub temu da sem za fizikalni model uporabil matematično nihalo, sem ta model lahko uporabil za opis nihanja fizikalnega nihala, saj lahko vsako fizično nihalo obravnavamo kot matematično nihalo, pri katerem je vsa masa nihala zbrana v težišču nihala. Paziti moram, da vzmet vpnem v masnem središču nihala. Na eno od nihali je delovala zunanja periodična sila. Na vsako od nihali je delovala zaviralna sila upora, za katero je veljal linearni zakon upora [12]. Iskanje modelskega časovnega poteka odmika posameznega nihala pomeni reševanje sistema dveh enačb (11) in (12).

Za numerično simulacijo eksperimenta sem uporabil program Berkeley Madonna. To orodje za reševanje sistema navadnih diferencialnih in diferenčnih enačb so razvili na univerzi Berkeley (Kalifornija, ZDA) leta 2009, uporabil pa sem zadnjo verzijo programa iz leta 2018 [14]. Program je precej preprost in poleg takojšnjega ogleda rešitev v grafičnem delu omogoča dinamično spreminjanje parametrov ter hiter izvoz rešitev v različnih podatkovnih formatih.

V prvem koraku smo v program vnesli enačbi (11) in (12) ter definirali hitrost (v) in pospešek (a)

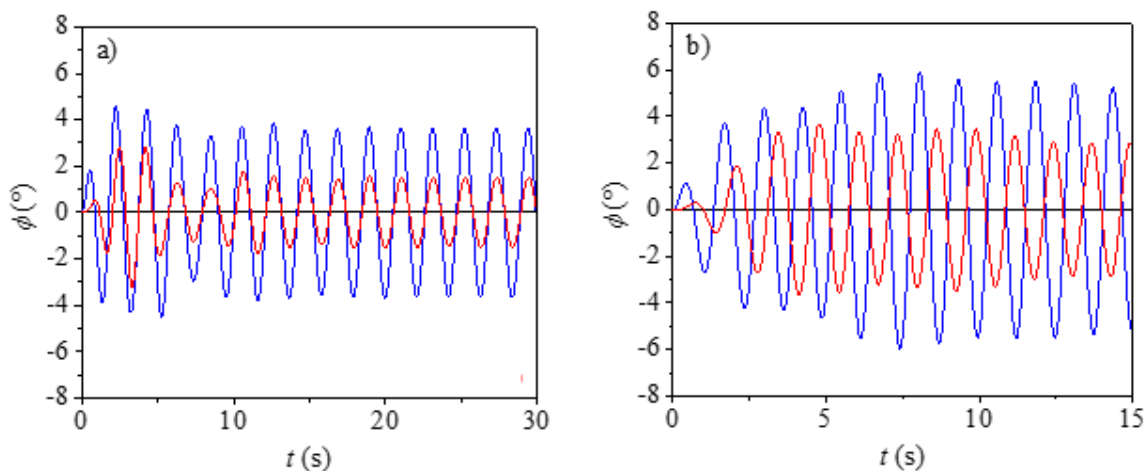
$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt}, \quad (17)$$

s čimer smo sistem dveh diferencialnih enačb 2. reda prevedli na sistem štirih diferencialnih enačb 1. reda. V naslednjem koraku smo določili začetne pogoje (lego in hitrost vsakega od nihali) in vnesli vse potrebne parametre (konstante): maso posameznega nihala, dolžino nihala, koeficient vzmeti, koeficient upora, amplitudo in frekvenco zunanje sile.

Časovni korak (DT) posamezne zanke smo nastavili na 0,02 s, kar je bil kompromis med hitrostjo računanja in natančnostjo prikazanega rezultata. Glede na to, da smo imeli v eksperimentih opravka s počasnimi pojavi in nizkimi frekvencami, se je takšna izbira izkazala za pravšnjo.

Z namenom spoznavanja vsiljenega nihanja sklopljenih nihali in preverjanjem teoretičnih napovedi smo napravili večje število simulacij pri različnih vrednostih frekvenc vsiljevanja. Na sliki 7 sta tako prikazani modelski nihanji obeh nihali pri dveh izbranih vsiljenih krožilnih frekvencah: $\omega_v = 3 \text{ rad/s}$ in $\omega_v = 5 \text{ rad/s}$. Spomnimo se, da je 1. nihalo tisto, na katerega deluje zunanja sila, ki vsiljuje nihanje. Oba primera potrjujeta osnovne značilnosti vsiljenega sklopljenega nihanja dveh nihali. Podobno kot pri vsiljenem nihanju enega nihala so na začetku prisotni prehodni pojavi, kjer se amplitudi obeh nihali s časom spreminjata. Opazimo lahko vzorec utripanja. V tem območju se tudi fazna razlika med obema nihalom spreminja s časom. Po določenem času se nihanje obeh nihali ustali, amplituda posameznega nihala in fazna razlika med njima se več ne spreminjata. V stacionarnem stanju nihata obe nihali s frekvenco vsiljevanja. V splošnem sta obe stacionarni amplitudi odvisni od frekvence vsiljevanja, enako

velja tudi za fazno razliko med nihalom. Opazimo, da sta na sliki 7a nihali skorajda v fazi, na sliki 7b, pri višji uporabljeni frekvenci vsiljevanja, pa nihata nihali v grobem v protifazi.



Slika 7. Teoretična napovedana zasuka (ϕ) dveh sklopljenih nihali v odvisnosti od časa (t), pri dveh različnih frekvencah vsiljevanja: a) $\omega_v = 3 \text{ rad/s}$ in b) $\omega_v = 3 \text{ rad/s}$. Modra krivulja predstavlja 1. nihalo, rdeča krivulja pa 2. nihalo.

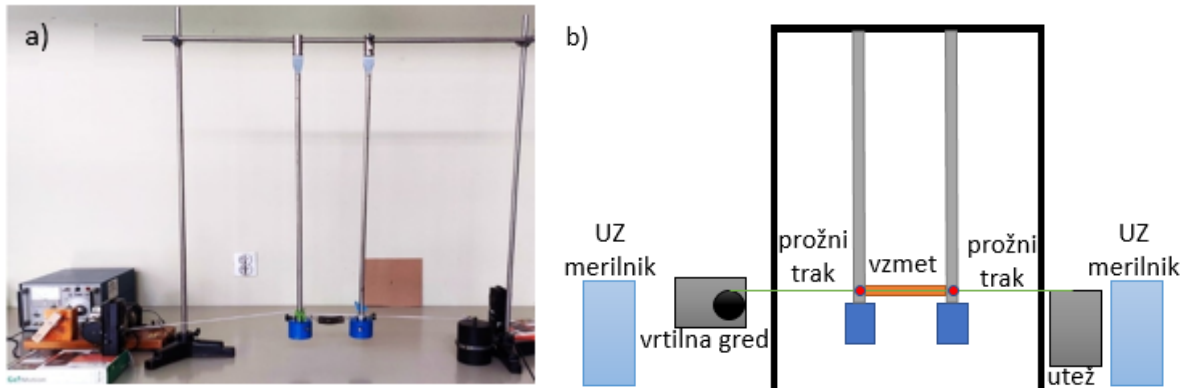
Po opravljenih eksperimentih in analizi smo ponovili simulacije z eksperimentalnimi vrednostmi parametrov. Modelski rezultati so prikazani skupaj z rezultati meritev v nadaljevanju seminarja.

4 Eksperiment

Na sliki 8 sta prikazani fotografija in shema postavitve eksperimenta vsiljenega nihanja sistema sklopljenih nihali. Dve enaki fizikalni nihali sem v njunem skrajnem spodnjem delu sklopil z vzmetjo s konstanto prožnosti $k = 6,5 \text{ N/m}$ ($1 \pm 0,05$), eno od nihali pa sem s prožnim trakom povezal z gredjo elektromotorja. Tako sem z vrtenjem gredi pridobil zunanjo periodično silo, s katero sem vsiljeval nihanje sistemu sklopljenih nihali. Ker je elastična sila zaradi traku prisotna samo ob nateznih obremenitvah, je bil trak raztegnjen že v ravnovesni legi nihala. Amplitude krožeče motorne gredi so znašale okrog 1,6 cm in so bile dovolj majhne, da so ob merjenih amplitudah nihala ohranjale trak v linearnem prožnem režimu. Isto nihalo je bilo z enakim trakom povezano na drugi strani z nepremično utežjo. Pri tem je bil trak v ravnovesni legi nihala podobno napet kakor trak, preko katerega sem vsiljeval nihanje. Tako sta bili vsoti obeh elastičnih sil ter njunih navorov v ravnovesni legi nihala enaki nič. Konstanta prožnosti traku je pri uporabljenih raztezkih znašala $k_0 = 0,60 \text{ N/m}$ ($1 \pm 0,15$). Frekvenco zunanje sile sem spreminjal s spreminjanjem napajalne napetosti elektromotorja, dosegljiv razpon krožilnih frekvenc je znašal od $\omega_{min} = 1,5 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) do $\omega_{maks} = 8,5 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$).

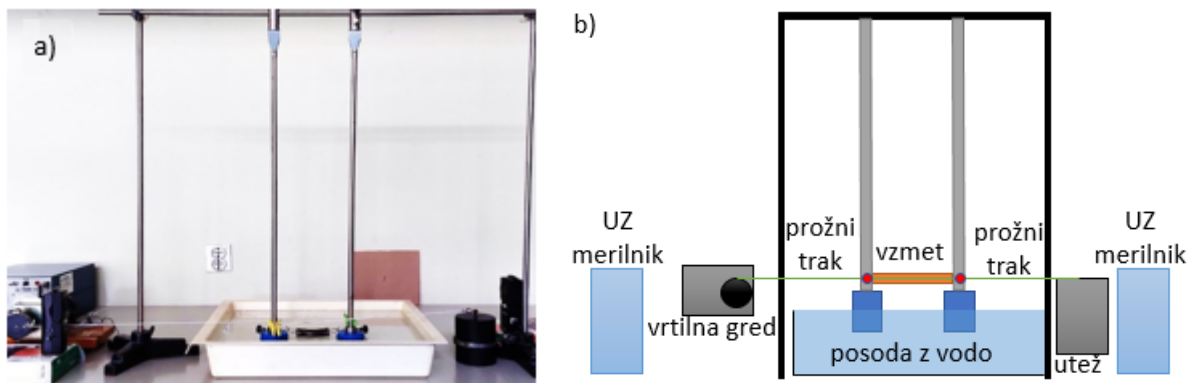
Pri različnih frekvencah elektromotorja sem meril časovno odvisnost vodoravnega odmika posameznega nihala in njune amplitude v stacionarnih stanjih. V ta namen sem uporabil dva Vernierjeva ultrazvočna merilnika [14], na obeh nihalih pa sem s plastično ščipalko natančno definiral merjeno točko. Ker je pojav relativno počasen, sem pri meritvah uporabljal gostoto

zajemanja podatkov 100 meritev/s. Celotni sistem niha rahlo dušeno že brez dodatnih dušilnih elementov. Poleg dušenja, ki se mu nisem mogel izogniti, sem celotno meritev ponovil še pri povečani stopnji dušenja. Dušenje sem povečal tako, da sem spodnji del obeh nihal potopil v posodo z vodo. Fotografija in shema eksperimenta pri povečanem dušenju sta prikazani na sliki 9.

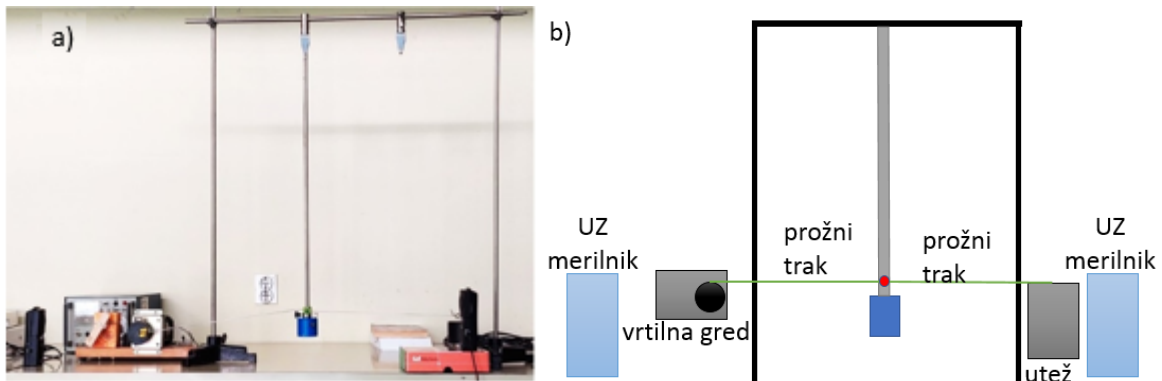


Slika 8. a) Fotografija in b) shema postavitve osnovnega eksperimenta pri šibkem (privzetem) dušenju. Dve enaki fizikalni nihali, sta sklopljeni preko vzmeti. Eno od nihali je s prožnim trakom na eni strani povezano na vrtečo se gred elektromotorja, na drugi strani pa na nepremično utež. Lego obeh nihali merimo z ultrazvočnimi merilnikoma.

Še pred izvedbo zgoraj opisanega eksperimenta sem uporabil iste potrebščine in z njimi ponovil eksperimenta, ki smo ju opravili pri predmetu Fizikalni eksperimenti 3 in se vsebinsko navezuje na temo diplomske naloge; to sta vaji Resonanca in Sklopljeno nihanje [15]. Pri meritvi resonance enega nihala sem odstranil 2. nihalo in vzmet. Poleg lege nihala sem meril še časovno odvisnost vodoravne lege gredi elektromotorja (slika 10). Tako sem izmeril resonančno krivuljo in fazno razliko med nihalom in zunanjo silo v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Nato sem izmeril še lastni frekvenci sklopljenega nihala pri izklopljenem elektromotorju. Meritev sem opravil brez prožnih trakov in z dodanima prožnima trakovoma. V drugem primeru sem simetrično postavitev eksperimenta dosegel tako, da sem vsako od nihali s parom prožnih trakov pripel na stacionarno oporo (utež). Pri tem so bili trakovi raztegnjeni približno toliko kot pri nadaljnjem eksperimentu, s katerim sem meril vsiljeno nihanje sklopljenih nihali.



Slika 9.a) Fotografija in b) shema postavitve eksperimenta pri povečani stopnji dušenja. Postavitev je enaka kot pri osnovnem eksperimentu (slika 8), dodana je še posoda z vodo, v katero sta delno potopljeni obe nihali.



5 Rezultati

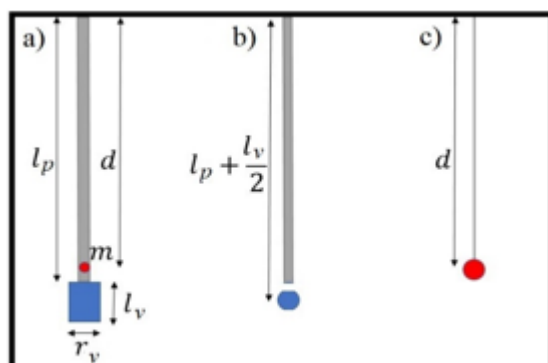
V tem poglavju bomo najprej predstavili meritve eksperimenta resonance enega nihala. Izmerili smo koeficient dušenja, lastno frekvenco nihala in amplitudo nihala v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Nato podali rezultate meritev vsiljenega sklopljenega nihanja pri šibkem in močnem dušenju, kjer smo izmerili lastne frekvence, koeficient dušenja in amplitudi obeh nihala v odvisnosti od frekvence vsiljevanja.

5.1 Resonanca enega nihala

Fizikalno nihalo je bilo sestavljeno iz tanke kovinske palice z dolžino $l_p = 0,71 \text{ m}$ ($1 \pm 0,01$) in maso $m_p = 0,662 \text{ kg}$ ($1 \pm 0,001$) ter iz valja z višino $l_v = 4,8 \text{ cm}$ ($1 \pm 0,02$), premerom osnovne ploskve $r_v = 3,0 \text{ cm}$ ($1 \pm 0,03$) in maso $m_v = 1,000 \text{ kg}$ ($1 \pm 0,001$). S preprostim izračunom in z meritvijo ugotovimo, da je masno središče nihala oddaljeno od osi vrtenja za $d = 0,62 \text{ m}$ ($1 \pm 0,02$). Pri izračunu lastnega (nedušenega) nihajnega časa nihala (T_{0t}) iz enačbe (1) smo za vztrajnostni moment valja uporabili model točkastega telesa (slika 11) in dobili vrednost $T_{0t} = 1,59 \text{ s}$ ($1 \pm 0,06$). V primeru, ko upoštevamo še učinek obeh prožnih trakov, dobimo v enačbi za izračun lastnega nihajnega časa v primerjavi z enačbo (1) še dodatni člen ($2 k_0 b^2$), ki predstavlja skupni navor obeh sil traku:

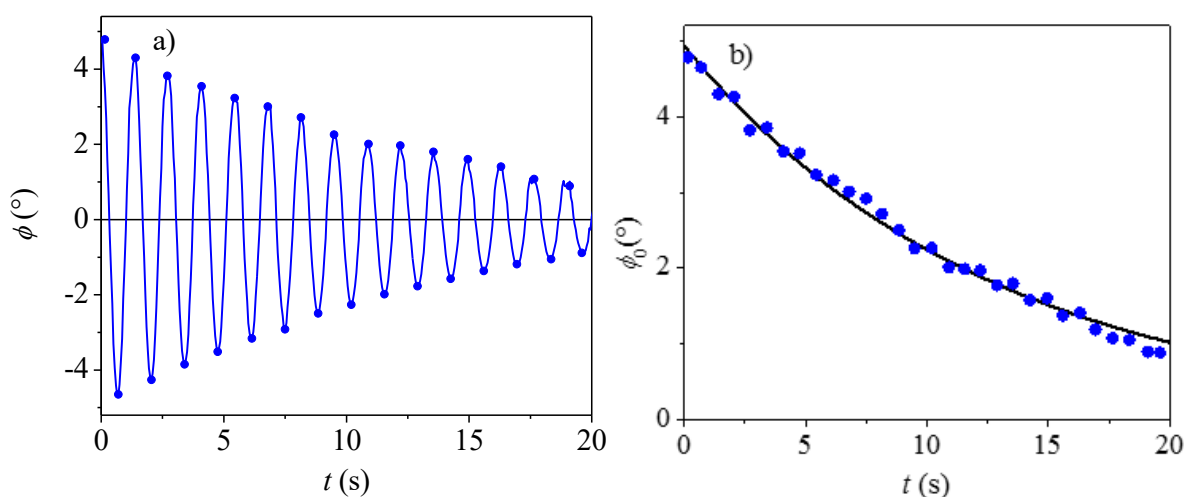
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd + 2 k_0 b^2}}, \quad (18)$$

pri čemer je $k_0 = 4,30 \text{ N/m}$ ($1 \pm 0,15$) konstanta prožnosti trakov in $b = 0,68 \text{ m}$ ($1 \pm 0,01$) oddaljenost prijemališča trakov od nihajne osi. Z dodatnim členom se poveča imenovalac v enačbi (1) za približno 40 %, izračunani lastni nihajni čas pa zmanjša za okrog 20 %, dobimo $T_{0t} = 1,35 \text{ s}$ ($1 \pm 0,06$).



Slika 11 a) Shema fizikalnega nihala s skupno maso m , ki je sestavljeno iz palice dolžine l_p in valja z dolžino l_v ter s premerom r_v . Masno središče nihala je od osi vrtenja oddaljeno za razdaljo d . b) Pri izračunu vztrajnostnega momenta nihala je bil uporabljen model tanke palice in točkastega telesa. c) Izračunani nihajni čas za fizikalno nihalo je enak nihajnemu času ekvivalentnega matematičnega nihala z dolžino d .

Na sliki 12a je prikazana izmerjena odvisnost zasuka nihala od časa pri lastnem nihanju. Zasuk nihala smo izračunali iz izmerjene vodoravne lege izbrane točke nihala v odvisnosti od časa in njene oddaljenosti od vrtilne osi. Iz večjega števila izmerjenih nihajev smo določili dušeni lastni nihajni čas $T = 1,37 \text{ s}$ ($1 \pm 0,01$) in pripadajočo dušeno lastno krožilno frekvenco nihala $\omega = 4,59 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,01$). Ob privzetku linearnega zakona upora smo iz prilagoditvene funkcije oblike $\phi_0 = A \exp(-\beta t)$, ki predstavlja teoretično spreminjanje vrednosti amplitude (ϕ_0) nihanja v odvisnosti od časa, določili koeficient dušenja $\beta = 0,079 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,10$) (slika 12b). Ob šibkem dušenju in razmerju $\beta/\omega \sim 0,02$ se nedušena lastna krožilna frekvenca v okviru merske napake ujema z izmerjeno dušeno lastno krožilno frekvenco. Enako velja za izmerjeni lastni nedušeni nihajni čas T_0 : $T_0 \approx T = 1,37 \text{ s}$ ($1 \pm 0,01$). Izmerjeni in teoretično izračunani lastni nihajni čas nedušenega nihanja, pridobljenega iz geometrijskih mer nihala in koeficienta prožnosti trakov, se v okviru merske napake ujemata.

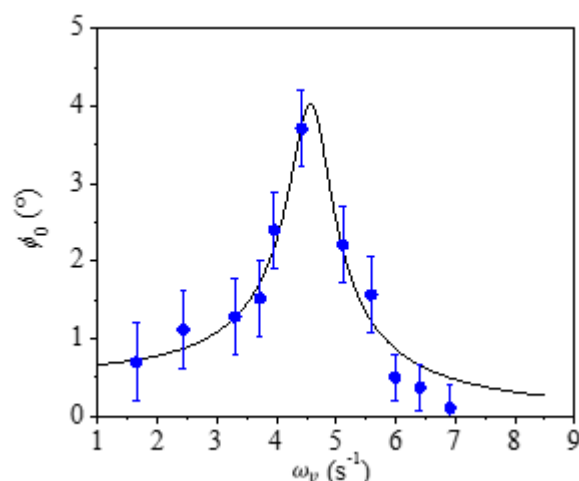


Slika 12. a) Izmerjeni zasuk nihala (ϕ) v odvisnosti od časa (t) pri lastnem nihanju. b) Amplituda zasuka ϕ_0 (modre točke) v odvisnosti od časa in prilagoditvena funkcija (črna krivulja) $\phi_0 = A \exp(-\beta t)$, kjer je $A = 4,9^\circ$ in $\beta = 0,079 \text{ s}^{-1}$.

Pri vsiljenem nihanju in določanju resonančne krivulje smo pri vsaki od frekvenc vsiljevanja počakal dovolj časa, da so izginili prehodni pojavi in je bilo nihanje relativno stabilno. Kljub temu smo na daljši časovni skali zaznali rahlo spreminjanje amplitude nihanja. Iz slednjega smo ocenili napako izmerjene amplitude. Vrtenje motorne gredi je bilo stabilno, frekvenca vsiljevanja pa je bila ob uporabi ultrazvočnega senzorja izmerjena z 0,1% napako. Na sliki 13 je prikazana odvisnost izmerjene amplitude nihanja od vsiljene krožne frekvence. Izmerjenim vrednostim je dodana najboljša prilagoditvena funkcija oblike enačbe (5), s katero opišemo teoretični potek resonančne krivulje. S prilagoditveno funkcijo smo določili lastno nedušeno krožilno frekvenco nihala $\omega_0 = 4,59 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) in koeficient dušenja $\beta = 0,36 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,20$).

Lastna krožilna frekvenca, določena s prilagajanjem resonančne krivulje izmerjenim vrednostim, se ob zelo majhni merski napaki ujema z neposredno izmerjeno lastno krožilno frekvenco. Oba izmerjena koeficienta dušenja pa se med seboj močno razlikujeta. Opazimo lahko, da je merjenje koeficienta dušenja iz resonančne krivulje mnogo manj zanesljivo kot merjenje iz zmanjševanja amplitude pri lastnem nihanju. Razlog za povečanje izmerjenega koeficienta dušenja pri vsiljenem nihanju je v načinu vsiljevanja nihanja: prožni trak je pripet na obod vrteče se motorne gredi, kar povzroči kroženje prijemališča traku. Poleg sile v vodoravni smeri, s katero vsiljujemo nihanje, se pojavlja še precejšnja dodatna sila v navpični smeri, ki nihanje močno duši.

V splošnem lahko na sliki 13 opazimo, da se v okviru merskih napak izmerjene amplitude dobro ujemajo s teoretičnim potekom resonančne krivulje. Nekoliko večja so odstopanja le pri višjih frekvencah vsiljevanja in majhnih amplitudah. Odstopanja verjetno izvirajo iz učinkov, ki jih opisani teoretični opis ne zajema (na primer sila traku), in kažejo na omejitve teoretičnega opisa. Ujemanje merskih rezultatov s potekom resonančne krivulje predstavlja hkrati merilo za vrednotenje rezultatov ciljnega eksperimenta – vsiljenega nihanja sistema dveh sklopljenih nihala.

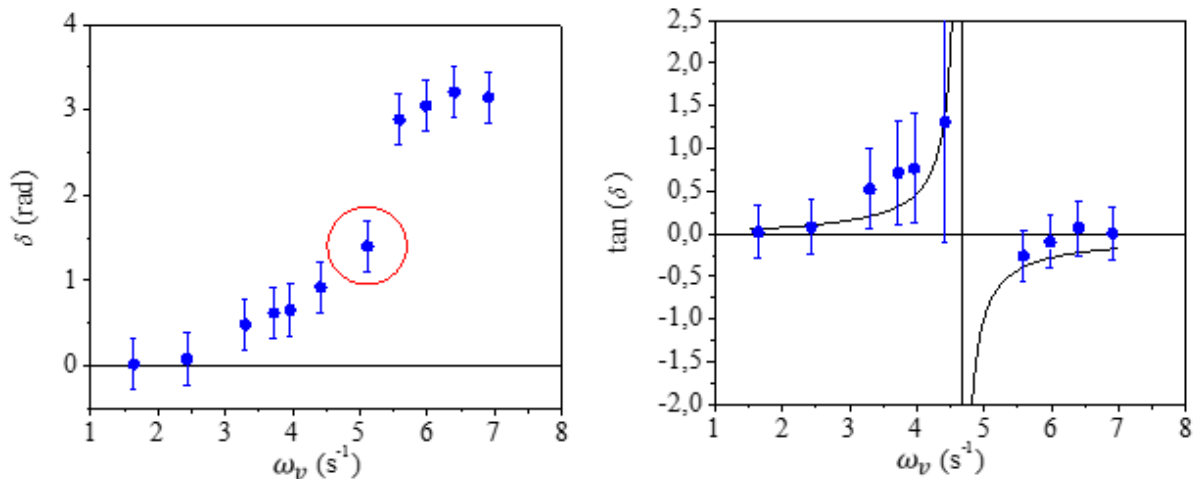


Slika 13. Izmerjena amplituda nihanja (ϕ_0) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v). Z modro so označene meritve, s črno krivuljo je narisana prilagoditvena resonančna funkcija $\phi_0 = C_1/\sqrt{(\omega_v^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega_v^2}$, kjer je $C_1 = 0,76 \text{ s}^{-2}$, $\omega_0 = 4,59 \text{ rad/s}$ in $\beta = 0,36 \text{ s}^{-1}$.

Na sliki 14a je prikazana izmerjena fazna razlika med nihanjem nihala in zunanje sile pri različnih frekvencah vsiljevanja. Ob dovolj močnem dušenju nihala je prehod iz nihanja v fazi (nižje frekvence) v nihanje v protifazi (višje frekvence) zvezen, kar se sklada s teoretično napovedjo. Na sliki 14b je prikazana vrednost $\tan(\delta)$ v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. To odvisnost lahko izkoristimo za določitev lastne krožilne frekvence in koeficienta dušenja. Pri tem so merske napake posameznih meritev različno velike. Iz tega razloga smo meritev fazne razlike $\delta \sim \pi/2$, ki je blizu pola funkcije $y = \tan x$, izločili iz analize. Za analizo smo uporabili dvo-parametrično prilagoditveno funkcijo oblike enačbe (6) in pri tem dobili $\omega_0 = 4,65 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,05$) in $\beta = 0,33 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,30$). Izkazalo se je, da je odstranitev izmerjene vrednosti, ki je povzročila največjo napako, močno povečala ujemanje prilagoditvene funkcije z meritvami. Na tak način se izmerjeni količini kljub 30% merski napaki ujemata z vrednostma, pridobljenima iz resonančne krivulje.

Za lažjo medsebojno primerjavo izmerjenih vrednosti in njihovih zanesljivosti pri uporabi različnih merilnih metod so v tabeli 1 še enkrat povzeti izmerjene lastne krožilne frekvence in koeficienti dušenja za nihanje enega nihala.

Ker se je izkazalo, da je bil uporabljeni merilni trak skoraj enako tog kot vzmet, s katero sem sklopil obe nihali, sem v nadaljevanju meritev zamenjal prvotni trak z bolj prožnim. Ta je imel občutno manjšo konstanto prožnosti $k_0 = 0,60 \text{ N/m}$ ($1 \pm 0,15$). Takšen trak v splošnem manj vpliva na izmerjeni nihajni čas. Glede na nihanje fizikalnega nihala brez traku se imenovallec v enačbi (1) z menjavo traku poveča za okrog 8 %, nihajni čas pa se zmanjša za 4 %, na $T_0 = 1,53 \text{ s}$ ($1 \pm 0,01$). Kljub temu vpliva traku v nadaljevanju meritev nismo več zaznali. Ob ponovljenih meritvah nihajnega časa enega nihala smo izmerili $T = 1,63 \text{ s}$ ($1 \pm 0,01$) in $\omega = 3,93 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,01$). Ob izmerjenem šibkem dušenju predstavljata ti dve vrednosti hkrati izmerjeni nedušeni lastni nihajni čas $T_0 = T = 1,63 \text{ s}$ ($1 \pm 0,01$) in izmerjeno nedušeno lastno krožilno frekvenco $\omega_0 = \omega = 3,93 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,01$). Opazimo lahko, da je izmerjeni nihajni čas praktično enak teoretični vrednosti iz začetka 5. poglavja, ki ne vključuje učinka prožnih trakov $T_{0t} = 1,59 \text{ s}$ ($1 \pm 0,06$). Poleg tega se izračunani nihajni čas za fizikalno nihalo praktično ujema z nihajnim časom ekvivalentnega matematičnega nihala (1,58 s) (slika 11c). To pomeni, da lahko za opis merjenega sistema sklopljenih nihal uporabimo preprostejši model sklopljenih matematičnih nihal brez upoštevanja dodatnih trakov tako, kot je prikazano v teoretičnem modelu na začetku naloge in pri opisu tvorbe fizikalnega modela za iskanje modelskih rešitev.



Slika 14. a) Izmerjena fazna razlika (δ) med nihalom in zunanjo silo v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v). b) Tangens fazne razlike ($\tan \delta$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Z modro so označene meritve, s črno krivuljo je narisana prilagoditvena funkcija $\tan \delta = -2\beta\omega_v/\omega_v^2 - \omega_0^2$, kjer je $\beta = 0,33 \text{ s}^{-1}$ in $\omega_0 = 4,65 \text{ rad/s}$. Prilagoditev je izvedena brez rdeče obkrožene meritve na sliki a)

Tabela 1. Izmerjene lastne krožilne frekvence (ω_0) in koeficient dušenja (β) pri nihanju enega nihala z uporabo različnih merilnih načinov. Dodana je še izračunana lastna krožilna frekvenca.

MERILNI NAČIN	ω_0 (rad/s)	β (s^{-1})
lastno nihanje	4,58 ($1 \pm 0,01$)	0,079 ($1 \pm 0,10$)
resonančna krivulja	4,59 ($1 \pm 0,02$)	0,36 ($1 \pm 0,20$)
fazna razlika	4,65 ($1 \pm 0,05$)	0,33 ($1 \pm 0,30$)
IZRAČUN (enačba (9))	4,65 ($1 \pm 0,06$)	-

5.2 Lastno sklopljeno nihanje dveh nihali

Prvo lastno (dušeno) frekvenco sistema dveh enakih sklopljenih nihali pri simetrični postavitvi eksperimenta smo dobili tako, da smo obe nihali odmaknili iz ravnovesja za enak začetni kot (okrog 5°) (slika 2a). Napetost vzmeti se pri tem nihajnem načinu ni bistveno spreminjala. Iz večjega števila nihajev smo izmerili prvi lastni nihajni čas $T_1 = 1,66 \text{ s}$ ($1 \pm 0,02$) in izračunali prvo lastno (dušeno) krožilno frekvenco $\omega_1 = 3,78 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$).

Drugo lastno (dušeno) frekvenco sistema dveh enakih sklopljenih nihali pri simetrični postavitvi eksperimenta smo dobili tako, da smo obe nihali odmaknili za enak začetni kot (okrog 5°) v nasprotnih smereh (slika 2b). Iz večjega števila nihajev smo izmerili drugi lastni nihajni čas $T_2 = 1,27 \text{ s}$ ($1 \pm 0,02$) in izračunali drugo lastno (dušeno) krožilno frekvenco $\omega_2 = 4,95 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$). Obe meritvi smo ponovili še brez obeh dodatnih prožnih trakov. Izkazalo se je, da odstranitev trakov ni zaznavno vplivala na izmerjena (dušena) lastna nihajna

časa. Obe izmerjeni vrednosti sta v okviru merskih napak ostali enaki kot pri postavitvi s trakovi.

Izmerjeni prvi lastni nihajni čas $T_0 = 1,66 \text{ s} (1 \pm 0,02)$ je v okviru napak enak izmerjenemu lastnemu nihajnemu času enega nihala $T_1 = 1,63 \text{ s} (1 \pm 0,01)$. Razhajanje obeh izmerjenih vrednosti smo izkoristili za korekcijo merske napake. Ob predpostavki, da se dušenje z dodano vzmetjo ni bistveno spremenilo in ostaja približno enako kot pri enem nihalu, predstavljata izmerjena dušena lastna nihajna časa hkrati tudi nedušena lastna nihajna časa. Velja $\omega_{10} = \omega_1 = 3,78 \text{ rad/s} (1 \pm 0,04)$ in $\omega_{20} = \omega_2 = 4,95 \text{ rad/s} (1 \pm 0,04)$. Izmerjena lastna nedušena nihajna časa primerjamo še s teoretičnima vrednostma, ki smo ju izračunali iz izmerjene geometrije nihal in iz izmerjenih koeficientov prožnosti uporabljene vzmeti (tabela 2.). V primeru, ko zanemarimo vpliv dodatnih prožnih trakov, dobimo iz enačb (9) oba teoretična lastna nihajna časa: $T_{1t} = 1,59 \text{ s} (1 \pm 0,06)$, $T_{2t} = 1,16 \text{ s} (1 \pm 0,06)$. Prvi nihajni čas se v okviru napak ujema z izmerjenim, pri drugem pa razlika presega ocenjene merske napake.

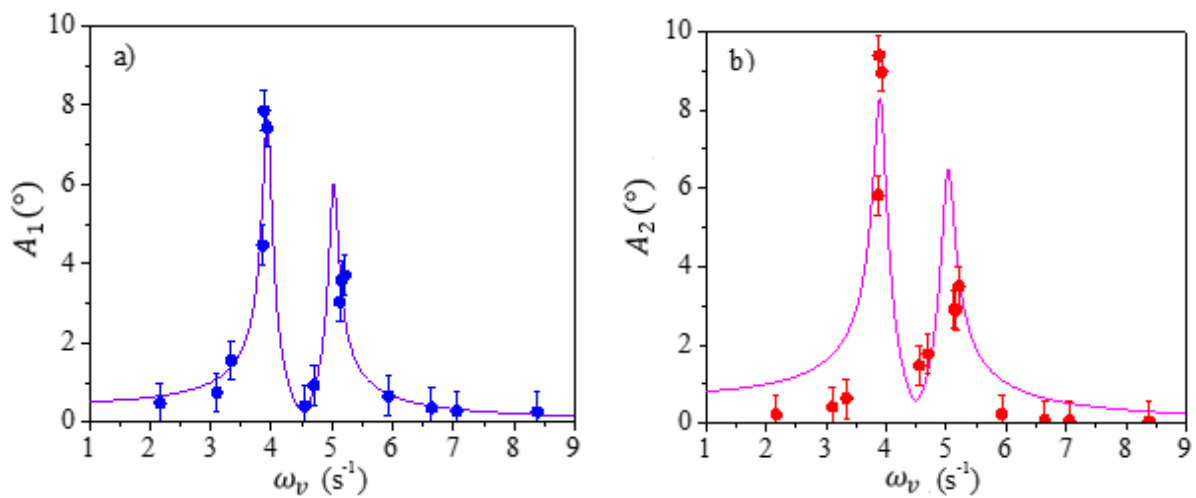
Obe izmerjeni lastni nedušeni krožilni frekvenci sistema sklopljenih nihal (ω_{10}, ω_{20}) uporabljamo v nadaljevanju pri analizi rezultatov meritev vsiljenega nihanja sistema sklopljenih nihal.

5.3 Vsiljeno sklopljeno nihanje – šibko dušenje

Na sliki 15 so prikazane izmerjene amplitude obeh nihal v odvisnosti od frekvence vsiljevanja v režimu šibkega (privzetega) dušenja. Za vsako od nihal je na sliki dodana še najboljša prilagoditvena funkcija, ki predstavlja predvideni teoretični potek, naveden v enačbah (13) in (14) ter prikazan na sliki 4a. Obe prilagoditveni funkciji vsebujeta štiri proste parametre: obe lastni nedušeni krožilni frekvenci, koeficient dušenja ter razmerje med amplitudo sile vsiljevanja in maso nihala ($F_0/2m$)

Opazimo lahko, da izmerjene amplitude pri obeh nihalih dobro sledijo napovedanemu trendu z dvema resonančnima vrhovoma. Vrhova za obe nihali sta pri istih frekvencah vsiljevanja, ki sta ob šibkem dušenju praktično enaki lastnima nedušenima krožilnima frekvencama sistema nihal. V skladu s teoretičnimi napovedmi so amplitude večje (bolj izrazita resonanca) v bližini nižje lastne frekvence (levi vrh). V skladu s teorijo naj bi bili pri frekvencah vsiljevanja v bližini obeh vrhov amplitudi obeh nihal približno enaki, pri meritvah pa velja to samo za vrh pri nižji frekvenci. V območju med obema vrhovoma ($\omega_{10} < \omega_v < \omega_{20}$), naj bi bile amplitude drugega nihala večje od amplitud prvega nihala. Pri zelo šibkem dušenju naj bi se v tem pasu vsiljenih frekvenc prvo nihalo po teoretičnih napovedih skoraj zaustavilo. Obe izvedeni meritvi v tem frekvenčnem območju lepo potrjujeta to teoretično napoved. V skladu s teoretičnimi napovedmi so izmerjene amplitude prvega nihala pri nizkih in pri visokih frekvencah vsiljevanja zaznavno večje od amplitud drugega nihala, česar pa v meritvah zaradi merskih napak nismo opazili.

Iz parametrov posamezne prilagoditvene funkcije lahko dobimo obe lastni frekvenci in koeficient dušenja. Ker so parametri neodvisni pri vsakem od obeh nihala, smo ocenili izmerjene lastne frekvence in koeficient dušenja iz povprečja obeh vrednosti, njuna razhajanja pa so predstavljala spodnjo mejo za napako posamezne meritve. Dobimo $\omega_{10} = 3,94 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$), $\omega_{20} = 5,03 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) in $\beta = 0,10 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,20$). Primerjava z neposredno izmerjenima lastnima nedušenima frekvencama $\omega_{10} = 3,78 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,04$) in $\omega_{20} = 4,75 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,04$) kaže na medsebojno ujemanje, pri čemer so parametri, pridobljeni iz resonančne krivulje, obremenjeni celo z manjšo mersko napako in so tako presenetljivo bolj zanesljivi. V splošnem so odstopanja izmerjenih vrednosti od teoretičnega poteka (slika 15) primerljiva z merskimi napakami resonance pri enem nihalu (slika 13). Meritev koeficienta dušenja iz resonančne krivulje omogoča oceno velikostnega reda, ampak je podobno nezanesljiva kot pri resonanci enega nihala.



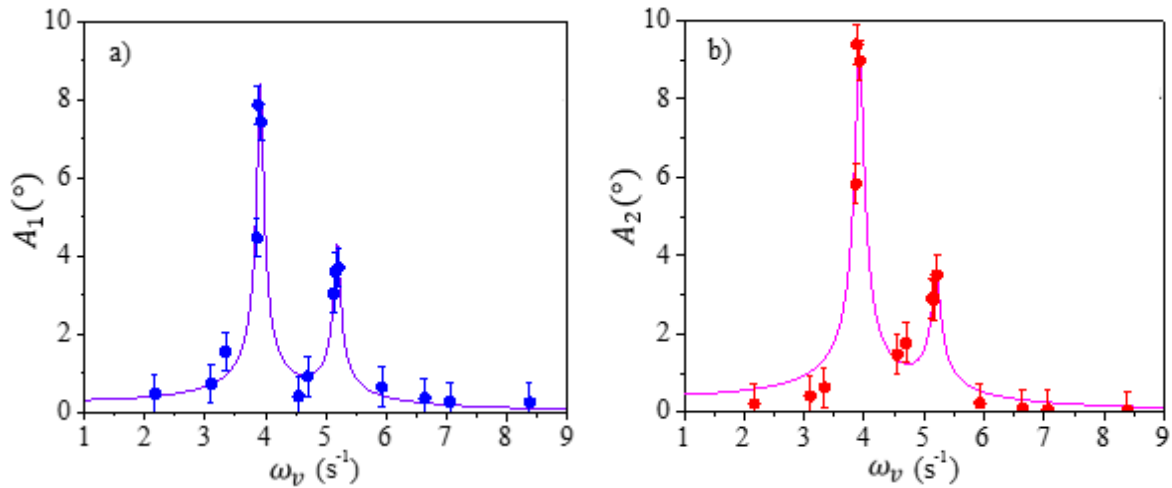
Slika 15. a) Izmerjena amplituda prvega nihala (A_1) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja, kjer so z modrimi pikami označene meritve in b) drugega nihala (A_2) v odvisnosti frekvence vsiljevanja, kjer so z rdečimi pikami označene meritve. Za vsako od nihala je dodana še prilagoditvena funkcija (enačbi (13) in (14)), kjer je $\omega_{10} = 3,94 \text{ rad/s}$, $\omega_{20} = 5,03 \text{ rad/s}$, $\beta = 0,10 \text{ s}^{-1}$ in $F_0/2m = 0,055 \text{ m/s}^2$.

V naslednjem koraku uporabimo za obe nihali isto prilagoditveno funkcijo z dodatnim, petim prostim parametrom. Empirična prilagoditvena funkcija, ki jo sestavimo kot linearno kombinacijo dveh prilagoditvenih funkcij iz enodimenzionalnega primera enačbe (5), ima obliko

$$A = \frac{C_1}{\sqrt{(\omega_v^2 - \omega_{10}^2)^2 + 4\beta^2\omega_v^2}} + \frac{C_2}{\sqrt{(\omega_v^2 - \omega_{20}^2)^2 + 4\beta^2\omega_v^2}}, \quad (19)$$

kjer sta C_1 in C_2 amplitudna faktorja, ki predstavljata uteži za oba resonančna vrhova. Kljub velikemu številu prostih parametrov je računalniško prilagajanje s programom LoggerPro3 podalo smiselne rezultate že brez dodatnih omejitev oziroma vnaprej določenih vrednosti. Tako dobimo teoretična poteka, ki sta prikazana na sliki 16 skupaj z izmerjenimi vrednostmi. Ujemanje z izmerjenimi vrednostmi potrjuje smiselnost uporabe prilagoditvene funkcije (enačba (19)) v primeru šibkega dušenja. Dobimo naslednje vrednosti: $\omega_{10} = 3,92 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$), $\omega_{20} = 5,19 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) $\beta = 0,067 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,50$). Obe

lastni krožilni frekvenci se odlično ujemata z vrednostma, določenima iz teoretične prilagoditvene, navedene v enačbah (13) in (14). Da smo uporabili empirično prilagoditveno funkcijo (enačba (19)), vidimo iz dejstva, da izmerjen koeficient dušenja precej odstopa od pričakovane vrednosti, hkrati je obremenjen z zelo veliko mersko napako. V splošnem pa lahko še enkrat potrdimo, da je določanje lastnih frekvenc iz resonančne krivulje zanesljivejše od neposrednega merjenja iz lastnih nihajnih načinov.



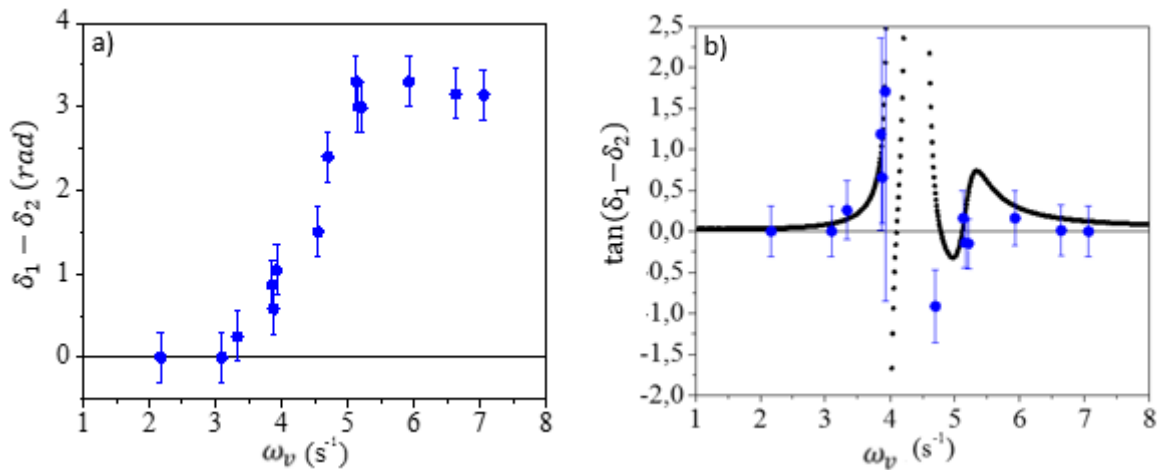
Slika 16. a) Izmerjena amplituda prvega nihala (A_1) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_0), kjer so z modrimi pikami označene meritve in b) drugega nihala (A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja, kjer so z rdečimi pikami označene meritve. Za vsako od nihala je dodana še prilagoditvena funkcija enačbe (19), kjer je $\omega_{10} = 3,92$ rad/s, $\omega_{20} = 5,19$ rad/s, $\beta = 0,067$ s $^{-1}$, $C_1 = 2,34$ s $^{-2}$ in $C_2 = 2,11$ s $^{-2}$.

Na sliki 17a je prikazana izmerjena fazna razlika med obema nihalom ($\delta_1 - \delta_2$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu šibkega (privzetega) dušenja. Opazimo lahko, da poleg nihanja v fazi ($\delta_1 - \delta_2 = 0$) pri nizkih frekvencah vsiljevanja in nihanja v protifazi pri visokih frekvencah vsiljevanja ($\delta_1 - \delta_2 = \pi$) nihata obe nihali tudi na načine, ki niso enaki lastnim nihajnim načinom. To je v nasprotju z drugo hipotezo raziskave, ki smo jo postavili v uvodnem poglavju, da nihali nihata samo v fazi ali protifazi.

Na sliki 17b je izmerjenim vrednostim $\tan(\delta_1 - \delta_2)$ dodana še najboljša teoretična tri-parametrična prilagoditvena funkcija, ki jo dobimo iz enačb (15) in (16) ter iz adicijskega izreka $\tan(\delta_1 - \delta_2) = (\tan \delta_1 - \tan \delta_2)/(1 + \tan \delta_1 \tan \delta_2)$. Prosti parametri prilagoditvene funkcije so obe lastni krožilni frekvenci in koeficient dušenja. Predviden teoretični trend zelo dobro sledi izmerjeni fazni razliki med obema nihalom. Dobimo $\omega_{10} = 4,10$ rad/s ($1 \pm 0,03$), $\omega_{20} = 5,15$ rad/s ($1 \pm 0,03$) in $\beta = 0,13$ s $^{-1}$ ($1 \pm 0,30$). Izmerjene količine se v okviru napak ujemajo z izmerjenimi vrednostmi iz resonančne krivulje, opazimo lahko tudi podobno zanesljivost rezultatov.

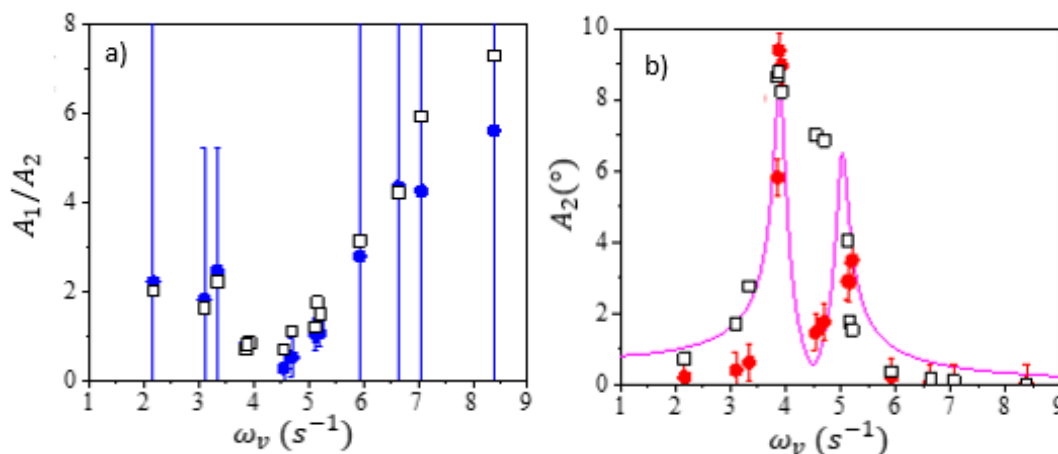
Na sliki 18 primerjamo izmerjene amplitude obeh nihala še z modelskimi rešitvami. Razmerje izmerjenih amplitud obeh nihala, prikazano na sliki 18a, sledi predvidenemu teoretičnemu poteku, ki smo ga že opisali v podpoglavju 2.3. Ob predpostavljene natančnosti merjenja posamezne amplitude lahko opazimo velike merske napake pri nizkih in visokih frekvencah

vsiljevanja. Modelske rešitve kljub merskim napakam dobro sledijo izmerjenemu trendu. Sklepamo lahko, da so bile ocenjene merske napake pri majhnih in velikih amplitudah nekoliko pretirane. V modelu je bila uporabljena vrednost koeficienta dušenja $\beta = 0,10 \text{ s}^{-1}$, ki smo jo izračunali iz resonančne krivulje. Izkazalo se je, da modelska razmerja amplitud niso bila preveč občutljiva na izbiro tega parametra, saj se v razponu uporabljenih vrednosti $0,05 \text{ s}^{-1} \leq \beta \leq 0,15 \text{ s}^{-1}$ modelske rešitve med seboj niso bistveno razlikovale.



Slika 17. a) Izmerjena fazna razlika ($\delta_1 - \delta_2$) med obema nihalom v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu šibkega dušenja. b) Tangens fazne razlike ($\tan(\delta_1 - \delta_2)$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Z modrimi pikami so označene meritve, črna krivulja predstavlja prilagoditveno funkcijo, pridobljeno iz enačb (15) in (16). Prilagojene vrednosti: $\omega_{10} = 4,10 \text{ rad/s}$, $\omega_{20} = 5,15 \text{ rad/s}$ in $\beta = 0,13 \text{ s}^{-1}$.

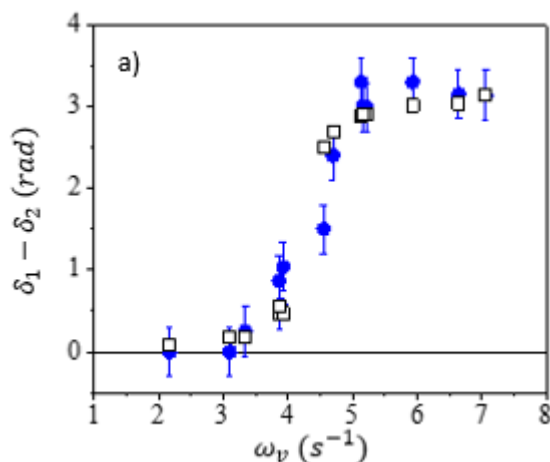
Na sliki 18b primerjamo še izmerjene amplitude drugega nihala neposredno z modelskimi amplitudami. Opazimo lahko, da sta v modelu oba resonančna vrhova premaknjena nekoliko proti nižjim vsiljenim frekvencam, kljub temu pa lahko vidimo dobro ujemanje modelskih amplitud z izmerjenimi. Poleg tega modelske amplitude zelo dobro sledijo teoretični prilagoditveni funkciji.



Slika 18. a) Primerjava razmerja izmerjenih amplitud (modre pike) obeh nihal (A_1/A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) z modelskimi vrednostmi (beli kvadratici). b) Primerjava izmerjenih amplitud (rdeče pike) drugega nihala (A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja z modelskimi vrednostmi (beli kvadratici), prilagoditvena funkcija dobljena iz enačb (13) in (14), s parametri: $\omega_{10} = 3,94 \text{ rad/s}$, $\omega_{20} = 5,03 \text{ rad/s}$, $\beta = 0,10 \text{ s}^{-1}$ in $F_0/2m = 0,055 \text{ m/s}^2$.

Na sliki 19 primerjamo izmerjene fazne razlike med obema nihalom ($\delta_1 - \delta_2$) z modelskimi faznimi razlikami. Opazimo zelo dobro medsebojno ujemanje. Model potrjuje izmerjeni prehod iz nihanja obeh nihal v fazi v nihanje v protifazi, pri čemer je modelski prehod nekoliko ostrejši. Tudi v tem primeru so modelske rešitve precej neobčutljive na spreminjanje vrednosti koeficienta dušenja. Za prikazane modelske rešitve je bila uporabljena vrednost koeficienta dušenja $\beta = 0,13 \text{ s}^{-1}$, ki smo jo izračunali iz meritev fazne razlike.

Za lažjo medsebojno primerjavo izmerjenih vrednosti in njihovih zanesljivosti pri uporabi različnih merilnih metod so v tabeli 2 še enkrat povzete vse izmerjene lastne krožilne frekvence in koeficienti dušenja v režimu šibkega dušenja.



Slika 19. Primerjava izmerjene fazne razlike (modre pike) med obema nihalom ($\delta_1 - \delta_2$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) z modelskimi vrednostmi (beli kvadrati).

Tabela 2. Izmerjene lastne nedušene krožilne frekvence za prvi nihajni način (ω_{10}) in drugi. nihajni način (ω_{20}) ter koeficient dušenja (β) pri vsiljenem sklopljenem nihanju v režimu šibkega dušenja.

MERILNI NAČIN	ω_{10} (rad/s)	ω_{20} (rad/s)	β (s^{-1})
lastno nihanje	3,78 ($1 \pm 0,04$)	4,95 ($1 \pm 0,04$)	-
resonančna krivulja (enačbi (14) in (15))	3,94 ($1 \pm 0,02$)	5,03 ($1 \pm 0,02$)	0,10 ($1 \pm 0,20$)
resonančna krivulja (enačba (19))	3,92 ($1 \pm 0,02$)	5,19 ($1 \pm 0,02$)	0,067 ($1 \pm 0,50$)
modeliranje	-	-	0,10 ($1 \pm 0,50$)
fazna razlika	4,10 ($1 \pm 0,03$)	5,15 ($1 \pm 0,03$)	0,13 ($1 \pm 0,30$)
IZRAČUN (enačba (9))	3,95 ($1 \pm 0,06$)	5,41 ($1 \pm 0,06$)	-

5.4 Vsiljeno sklopljeno nihanje – močno dušenje

Meritve in analize, opisane v poglavju 5.3, sem ponovil še v režimu močnega dušenja. Pri tem sta bili krajišči obeh fizikalnih nihali potopljeni v posodo z vodo (slika 9).

Na sliki 20 so prikazane izmerjene amplitude obeh nihali v odvisnosti od frekvence vsiljevanja v režimu močnega dušenja. Za vsako od nihali je na sliki 20 dodana še najboljša prilagoditvena funkcija, ki predstavlja predvideni teoretični potek, naveden v enačbah (13) in (14) ter prikazan na sliki 4. Obe prilagoditveni funkciji vsebujeta tri proste parametre: obe lastni nedušeni krožilni frekvenci in koeficient dušenja.

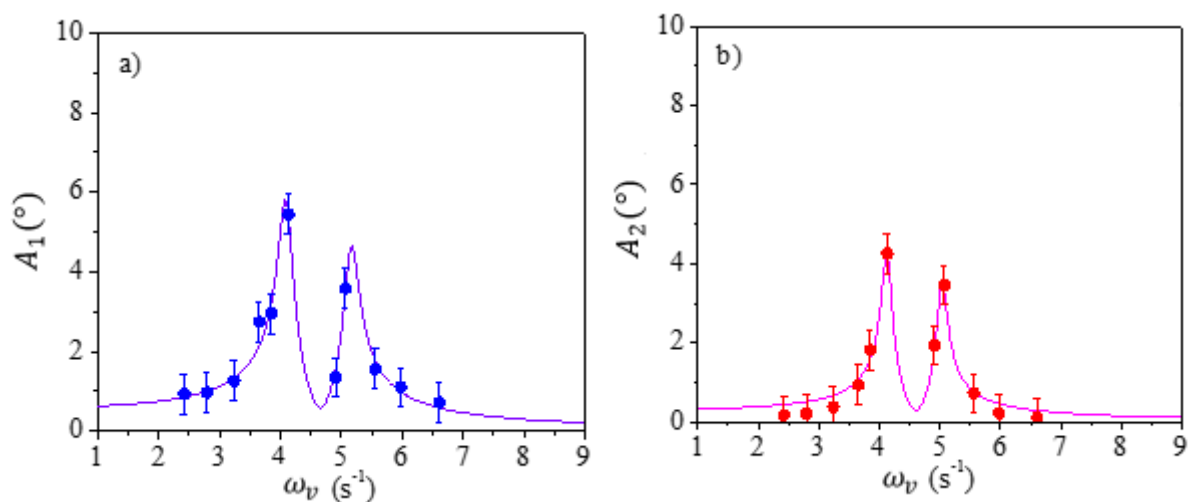
Izmerjene amplitude v bližini resonančnih vrhov so zaznavno manjše od izmerjenih v režimu šibkega dušenja (sliki 15 in 16). Kljub temu ostajata obliki obeh prilagoditvenih funkcij podobni. Levi resonančni vrh ne sledi premikom k nižjim frekvencam, kot predvideva teoretični potek za režim močnega dušenja (slika 4b).

Lastni krožilni frekvenci in koeficient dušenja izračunamo iz obeh prilagoditvenih funkcij na enak način, kot smo že opisali pri šibkem dušenju. Dobimo $\omega_{10} = 4,11 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$), $\omega_{20} = 5,10 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) in $\beta = 0,23 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,20$). Izmerjeni frekvenci se ujemata z rezultatom pri šibkem dušenju in sledita neposredno izmerjenim vrednostim iz lastnih nihanj. Povečanje koeficienta dušenja je komaj zaznavno, njegova merska napaka pa ostaja enako velika, kot pri šibkem dušenju.

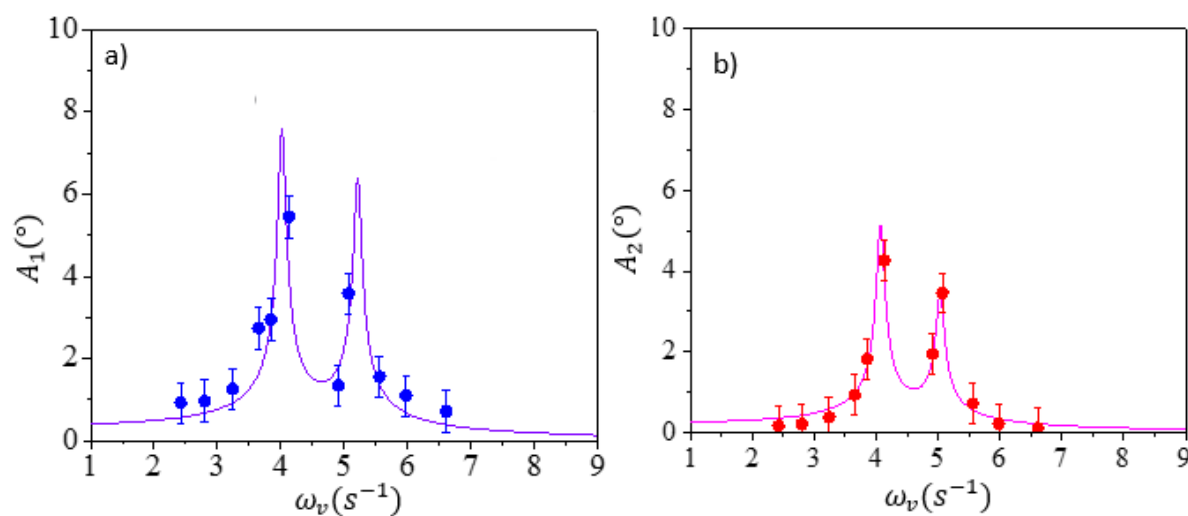
Tudi pri analizi rezultatov v režimu močnega dušenja, uporabimo za obe nihali empirično prilagoditveno funkcijo (enačba (19)). Tako dobimo teoretična poteka, prikazana na sliki 21. Iz prilagoditvene funkcije dobimo vrednosti $\omega_{10} = 4,04 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$), $\omega_{20} = 5,12 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) in $\beta = 0,075 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,50$). Obe lastni krožilni frekvenci se tudi tokrat odlično ujemata z vrednostmi, pridobljenimi iz teoretične prilagoditvene krivulje. Da imamo opravka samo z empirično prilagoditveno funkcijo in privzeto sistemsko napako vidimo tudi tokrat iz izmerjenega koeficienta dušenja, ki je ponovno manjši od pričakovane vrednosti in obremenjen z zelo veliko mersko napako. V splošnem pa lahko še enkrat potrdimo, da je določanje lastnih frekvenc iz resonančnih krivulj zanesljivejše od neposrednega merjenja iz lastnih nihajnih načinov.

Na sliki 22a je prikazana izmerjena fazna razlika med obema nihalom ($\delta_1 - \delta_2$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja v režimu močnega dušenja. Poleg nihanja v fazi ($\delta_1 - \delta_2 = 0$) pri nizkih frekvencah vsiljevanja in nihanja v protifazi ($\delta_1 - \delta_2 = \pi$) pri visokih frekvencah vsiljevanja, zaznamo pri treh meritvah nihanja, ki niso enaka lastnim nihajnim načinom. Na sliki 22b je izmerjenim vrednostim $\tan(\delta_1 - \delta_2)$ dodana še teoretična tri-parametrična prilagoditvena funkcija, ki jo dobimo iz enačb (15) in (16) ter adicijskega izreka. Prosti parametri prilagoditvene funkcije so obe lastni krožilni frekvenci in koeficient dušenja. Predviden teoretični trend zelo dobro sledi izmerjeni fazni razliki. Presenetljivo velja to tudi za meritve, ki je izstopala na sliki 22a. Dobimo $\omega_{10} = 4,05 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$), $\omega_{20} = 5,10 \text{ rad/s}$ ($1 \pm 0,02$) in $\beta = 0,15 \text{ s}^{-1}$ ($1 \pm 0,30$). Izmerjene lastne krožilne

frekvence količine se zelo dobro ujemajo z izmerjenimi vrednostmi pri šibkem dušenju in pri preostalih merilnih načinih. Koeficient dušenja se v primerjavi z isto meritvijo pri šibkem dušenju komaj zaznavno poveča, njegova merska napaka pa ostaja enaka.



Slika 20. Izmerjeni amplitudi (A_1, A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu močnega dušenja za a) prvo in b) drugo nihalo. Za vsako od nihalo je dodana še prilagoditvena funkcija enačb (13) in (14), kjer je $\omega_{10} = 4,04 \text{ rad/s}$, $\omega_{20} = 5,10 \text{ rad/s}$, $\beta = 0,13 \text{ s}^{-1}$ in $F_0/2m = 0,049 \text{ m/s}^2$

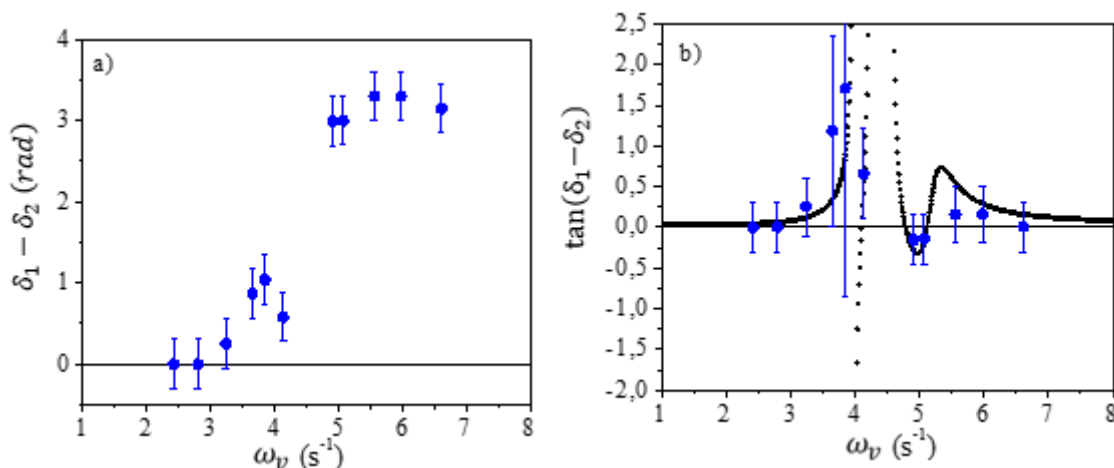


Slika 21. Izmerjeni amplitudi (A_1, A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu močnega dušenja za a) prvo in b) drugo nihalo. Za vsako od nihalo je dodana še prilagoditvena funkcija enačbe (19), kjer je $\omega_{10} = 4,05 \text{ rad/s}$, $\omega_{20} = 5,12 \text{ rad/s}$, $\beta = 0,075 \text{ s}^{-1}$, $C_1 = 2,21 \text{ s}^{-2}$ in $C_2 = 1,98 \text{ s}^{-2}$.

Za lažjo medsebojno primerjavo izmerjenih vrednosti in njihovih zanesljivosti pri uporabi različnih merilnih metod so v tabeli 3 še enkrat povzete vse izmerjene lastne krožilne frekvence in koeficienti dušenja v režimu močnega dušenja.

Ker s tremi merilnimi načini nismo zaznali občutno povečanega koeficienta dušenja, sklepamo, da smo kljub dodatnim elementom v postavitvi eksperimenta ostali v istem dušilnem režimu. Po teoretični napovedi naj bi bila na spremembo dušenja najbolj občutljiva količina razmerje

amplitud obeh nihal. Pri tem je občutljivost razmerja amplitud na dušenje odvisna tudi od koeficienta prožnosti uporabljene vzmeti (slika 5).

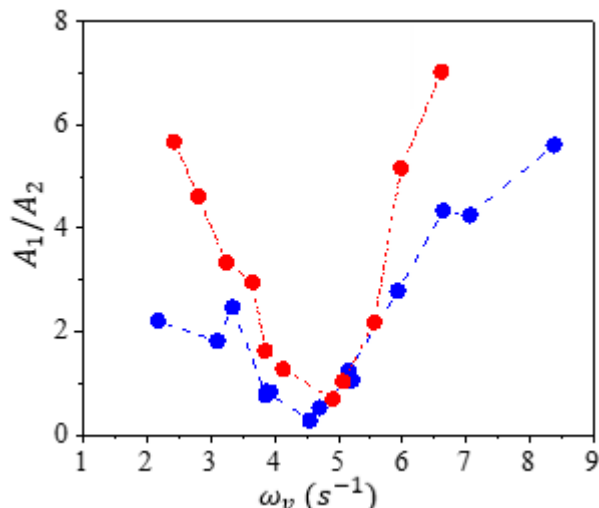


Slika 22. a) Izmerjena fazna razlika ($\delta_1 - \delta_2$) med obema nihalom v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_v) v režimu močnega dušenja. b) Tangens fazne razlike ($\tan(\delta_1 - \delta_2)$) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja. Z modrimi pikami so označene meritve, črna krivulja predstavlja prilagoditveno funkcijo, pridobljeno iz enačb (15) in (16). Prilagojene vrednosti: $\omega_{10} = 4,05$ rad/s, $\omega_{20} = 5,10$ rad/s in $\beta = 0,15$ s⁻¹.

Na sliki 23 je prikazano razmerje izmerjenih amplitud obeh nihal v odvisnosti od frekvence vsiljevanja za oba režima dušenja. V grobem lahko opazimo dva različna trenda, ki sta podobna teoretičnim napovedim (sliki 5a in 5b). Pri tem meritve v režimu šibkega dušenja sledijo napovedanemu trendu za nedušeno nihanje, meritve v režimu močnega dušenja pa napovedanemu trendu za šibko dušenje. Kljub velikim merskim napakam v območju nizkih in visokih frekvenc vsiljevanja pa je to edina metoda, s katero lahko dovolj zanesljivo zaznamo spremembo režima dušenja v obeh delih eksperimenta.

Tabela 3. Izmerjene lastne nedušene krožilne frekvence 1. nihajnega načina (ω_{10}) in 2. nihajnega načina (ω_{20}) ter koeficienta dušenja (β) pri vsiljenem sklopljenem nihanju v režimu močnega dušenja.

MERILNI NAČIN	ω_{10} (rad/s)	ω_{20} (rad/s)	β (s ⁻¹)
lastno nihanje	4,08 (1 ± 0,04)	5,15 (1 ± 0,04)	-
resonančna krivulja (enačbi (14) in (15))	4,11 (1 ± 0,02)	5,10 (1 ± 0,02)	0,13 (1 ± 0,20)
resonančna krivulja (enačba (19))	4,04 (1 ± 0,02)	5,12 (1 ± 0,02)	0,075 (1 ± 0,50)
fazna razlika	4,05 (1 ± 0,03)	5,10 (1 ± 0,03)	0,15 (1 ± 0,30)
IZRAČUN (enačba (9))	3,95 (1 ± 0,06)	5,41 (1 ± 0,06)	-



Slika 23. Izmerjeno razmerje amplitud obeh nihal (A_1/A_2) v odvisnosti od frekvence vsiljevanja (ω_p). Z modro so označene izmerjene amplitude v režimu šibkega dušenja, z rdečo pa v režimu močnega dušenja.

6 Zaključek

V diplomskem seminarju smo obravnavali vsiljeno nihanje sistema dveh sklopljenih nihali. Meritve smo izvedli na sistemu dveh sklopljenih fizičnih nihali, ki smo ju z vzmetjo sklopili v masnem težišču. S tem smo dosegli, da smo pri teoretični obravnavi sistem prevedli na obravnavo dveh sklopljenih matematičnih nihali. Rezultate meritev smo nato primerjali z napovedanimi teoretičnimi rezultati iz literature. Razumevanje vključenih procesov in izmerjene lastne frekvence ter koeficienti dušenja so nam omogočili zanesljivejšo analizo rezultatov meritev vsiljenega sklopljenega nihanja, njihovo interpretacijo in s tem razumevanje samega pojava.

Eksperimentalno smo potrdili osnovne teoretične značilnosti vsiljenega nihanja sistema dveh sklopljenih nihali. Ko izzvenijo prehodni pojavi, začneta sklopljeni nihali nihati s stalno amplitudo, stalno fazno razliko in s stalno frekvenco, ki je enaka frekvenci vsiljevanja. Resonančna krivulja ima dva vrhova. Pri zmernih režimih dušenja ležita oba vrhova v bližini lastnih frekvenc sistema nihali. Pri tem sta amplitudi obeh nihali večji pri nižji resonančni frekvenci. V širokem pasu vsiljenih frekvenc se amplitude obeh nihali med seboj bistveno ne razlikujejo, še največje so razlike v področju med obema lastnima frekvencama, ko se nihalo, ki mu vsiljujemo nihanje, skoraj zaustavi. V bližini prvega resonančnega vrha (nižja lastna frekvenca) nihata nihali medsebojno v fazi, v bližini drugega vrha (višja lastna frekvenca) pa nihata v protifazi.

Dobro ujemanje meritev vsiljenega nihanja sistema sklopljenih nihali s teoretičnimi napovedmi smo izkoristili za določanje obeh lastnih nedušenih krožilnih frekvenc in koeficienta upora sistema sklopljenih nihali. Metoda je uporabna tudi takrat, ko nihali nista enaki in je težko eksperimentalno ugotoviti začetne pogoje lastnih nihajnih načinov. Ugotovili smo, da se različne metode v splošnem razlikujejo v zanesljivosti rezultatov, vendar se rezultati v okviru napak ujemajo.

Pokazali smo tudi, da lahko potek resonančne krivulje sistema dveh sklopljenih nihali modeliramo z linearno kombinacijo dveh resonančnih krivulj, ki jih poznamo iz vsiljenega nihanja enega nihala, vendar ima s takšnim načinom pridobljena vrednost koeficienta dušenja 50% napako.

Z obravnavo vsiljenega nihanja sistema sklopljenih nihali smo ugotovili, da je pri kompleksnejših meritvah poleg vrednosti posamezne merjene fizikalne količine enako pomembna tudi zmožnost določanja njene napake. Uporaba večjega števila neodvisnih merilnih metod (merjenje amplitud, merjenje faznih razlik, tvorba modela) in poznavanje njihovih zanesljivosti, sta nam omogočila smiselno navzkrižno uporabo izmerjenih vrednosti, s čimer smo povečali zanesljivost končnih rezultatov.

Literatura in viri

- [1] J. Strnad, *Fizika. 1. del* (DMFA, Ljubljana, 2002).
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton in M. L. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, Reading, 1989).
- [3] L. D. Landau in E. M. Lifshitz, *Mechanics, 3rd Edition* (Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 1976).
- [4] D. Halliday, R. Resnick, in J. Walker, *Fundamentals of Physics, 8th Edition* (Wiley, Chichester, 2008).
- [5] H. D. Young and R. A. Freedman, *Sears and Zampansky's University Physics: With Modern Physics, 11th Edition* (Addison-Wesley, San Francisco, 2004).
- [6] R. A. Serway, *Physics For Scientists & Engineers, 3th Edition* (Saunders Golden Sunburst Series, Philadelphia, 2004).
- [7] D. C. Giancoli, *Physics Principles with Applications, 4th Edition* (Prentice-Hall, London, 1995).
- [8] M. E. Foulaadvand in D. Masoumi, *Mechanical filtering in forced-oscillation of two coupled pendulums*, Phys. Educ. **27**, 39 (2010).
- [9] W. B. Case, P. J. H. Tjossem, K.G. Abrams, in J. F. St. Germaine-Fuller, *Coupled oscillators driven with difference-frequency parametric position feedback*, J. Appl. Phys. **122**, 124905 (2017).
- [10] S. Belbasi, M. E. Foulaadvand in J. J. Yong, *Anti-resonance in a one-dimensional chain of driven coupled oscillators*, Am. J. Phys. **82**, 32 (2014).
- [11] R. V. Jensen, *Synchronization of driven nonlinear oscillators*, Am. J. Phys. **70**, 607 (2002).
- [12] R. Hauko in R. Repnik, *Damped harmonic oscillation: Linear or quadratic drag force?*, Am. J. Phys. **87**, 910 (2019).

[13] Wikipedija, *Berkeley Madonna*, Pridobljeno 15. 8. 2022, iz https://en.wikipedia.org/wiki/Berkeley_Madonna.

[14] Vernier, *Vernier*, Pridobljeno 15. 8. 2022, iz <https://www.vernier.com/>.

[15] R. Repnik in R. Hauko, *Fizikalni eksperimenti 3: Zbirka laboratorijskih vaj* (Univerzitetna založba Univerze v Mariboru, Maribor, 2022).