Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

Numerična simulacija vrtincev v toku tekočine za kvadratno oviro

Diplomski seminar na študijskem programu 1. stopnje Fizika

Juš Polanšek

Mentor: doc. dr. Uroš Tkalec

Maribor, 2021

POLANŠEK, J.: Numerična simulacija vrtincev v toku tekočine za kvadratno oviro
Diplomski seminar, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, 2021.

POVZETEK
V diplomskem seminarju izdelamo simulacijo toka newtonske tekočine po kanalu s kvadratno oviro. Program numerično rešuje sistem dvodimenzionalnih Navier-Stokesovih enačb. Hitrostno polje in vrtinčnost vizualiziramo in obenem analiziramo vrtinčenje tekočine za oviro. Analize opravimo za kvadratne ovire različnih velikosti, postavljene na različna mesta v kanalu. Spreminjamo tudi hitrost tekočine in število ovir. Opazujemo nastajanje von Karmanove vrtinčne steze in izračunamo Strouhalovo število ter ga primerjamo z vrednostmi iz literature.

Ključne besede: newtonska tekočina, Navier-Stokesova enačba, numerična simulacija, vrtinčenje, von Karmanova vrtinčna steza

ABSTRACT
The thesis presents a simulation of a Newtonian fluid flowing through a channel with a rectangular obstacle. A computer program was deployed for the numerical solution of two-dimensional Navier–Stokes equations. The calculated velocity field was subsequently visualised in order to observe the fluid's vorticity behind the obstacle. The analysis was carried out for rectangular obstacles of different sizes which were placed at different places in the channel. We changed the speed of the flowing liquid and the number of obstacles. We observed the formation of the von Karman vortex street and calculated the Strouhal number. The results were compared with those from the literature.

Key words: Newtonian fluid, Navier-Stokes equation, numerical simulation, vorticity, von Karman vortex street

Kazalo

1 Uvod

Ko se je leta 1940 porušil most Tacoma Narrows, je priznani strokovnjak na področju aeronavtike Theodore von Karman [1] podal hipotezo o vzroku nesreče. Menil je, da so nihanje mostu povzročili zračni vrtinci, ki so nastajali v ravno pravšnjih časovnih intervalih, da so ujeli lastno frekvenco mostu. Zaradi resonančnega odziva se je amplituda oscilacij preveč povečala in most se je porušil. Kasneje so ugotovili, da je bil dejanski vzrok za nesrečo takrat še neznan način zvijanja mostu, ki ga je povzročilo aeroelastično plapolanje zaradi vetra s hitrostjo 64 m/s [2]. Kljub temu da so von Karmanovo hipotezo ovrgli, se pojav enakomernega nastajanja vrtincev za oviro v gibajoči tekočini imenuje von Karmanova vrtinčna steza. A ta pojav so pred Theodorom von Karmanom opazovali že drugi, med drugim Henri Bénard in Vincenc Strouhal [1]. Slednji je že leta 1878 uvedel brezdimenzijsko število, ki opisuje oscilirajoče nastajanje vrtincev za oviro. To število je odvisno od hitrosti tekočine, geometrije ovire in kanala ter frekvence nastajanja vrtincev. Pri večjih vrednostih Strouhalovega števila (reda velikosti 1) v toku prevladujejo oscilacije, pri manjših vrednostih pa hiter tok vrtince razčeše, še preden lahko nastanejo. Pojave, kot je von Karmanova vrtinčna steza, dobimo pri vmesnih vrednostih Strouhalovega števila (okoli 0,2) [3].

Raziskovalci z National Taiwan Ocean University so raziskovali oblike vrtincev za kvadratno oviro. Oviro so zavrteli za različne kote in ugotovili, da je Strouhalovo število najmanjše, ko je tok pravokoten na stranico, in največje, ko je ovira zasukana za 15° [4]. Korejskim raziskovalcem je s pomočjo manjših ovir uspelo narediti plašč, s katerim ovijemo večjo oviro tako, da postane hidrodinamsko nevidna, saj nanjo ne delujejo hidrodinamske sile [5]. Vrtinci za ovirami so zanimivi tudi na mikroskali, predvsem za mešanje kompleksnih tekočin pri majhnih hitrostih toka v mikrofluidičnem okolju [6].

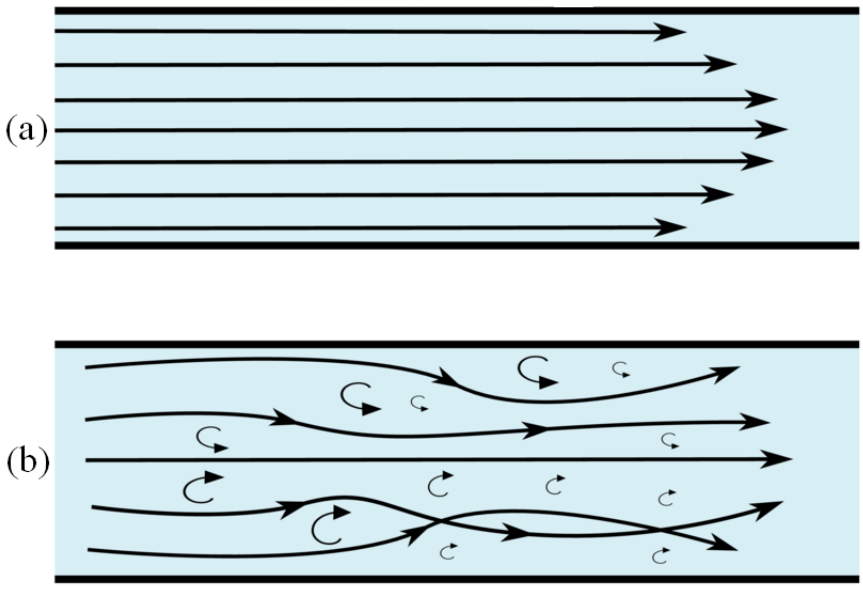
V preteklosti so dinamiko tekočin preučevali le eksperimentalno. Z razvojem računalnikov pa lahko gibanje tekočin raziskujemo tudi s simulacijami, ki so vse hitrejše in natančnejše. Takšne simulacije lahko s pomočjo literature izdelamo sami [7] ali pa uporabimo namenska programska orodja. Ta so lahko prosto dostopna, kot je OpenFOAM [8], ali pa plačljiva, kot npr. ANSYS Fluent [9] in Autodesk CFD [10].

Cilj diplomskega seminarja je izdelati simulacijo pretakanja newtonske tekočine po kanalu s kvadratno oviro in analizirati, kako različni parametri, kot so hitrost tekočine in velikost ter postavitev ovire, vplivajo na vrtinčenje tekočine.

V diplomskem seminarju najprej predstavimo osnove dinamike tekočin (poglavje 2). Sledi opis numerične metode, ki jo uporabimo v programu (poglavje 3). Na koncu preučimo rezultate simulacije, izračunamo Strouhalovo število in analiziramo, kako različne postavitve ovir vplivajo na tok v kanalu (poglavje 4).

2 Tok tekočin

Tok tekočine v kanalu delimo na laminarni in turbolentni. O laminarnem toku govorimo takrat, ko plasti tekočine tečejo druga ob drugi in se med seboj ne prepletajo. Takšen tok nastane v viskoznih tekočinah, ki se gibljejo dovolj počasi (slika 1a). Če tekočini povečamo hitrost, pa se plasti v njej začnejo mešati in v toku nastanejo vrtinci. Takrat pravimo, da je tok turbolenten (slika 1b).



Slika 1. a) Laminarni in b) turbolentni tok v kanalu [11].

Tokovni režim (laminarni ali turbolentni) se določi z oceno Reynoldsovega števila (Re) [12]. To je brezdimenzijsko število, ki zajema fizikalne značilnosti toka. Izračunamo ga z enačbo

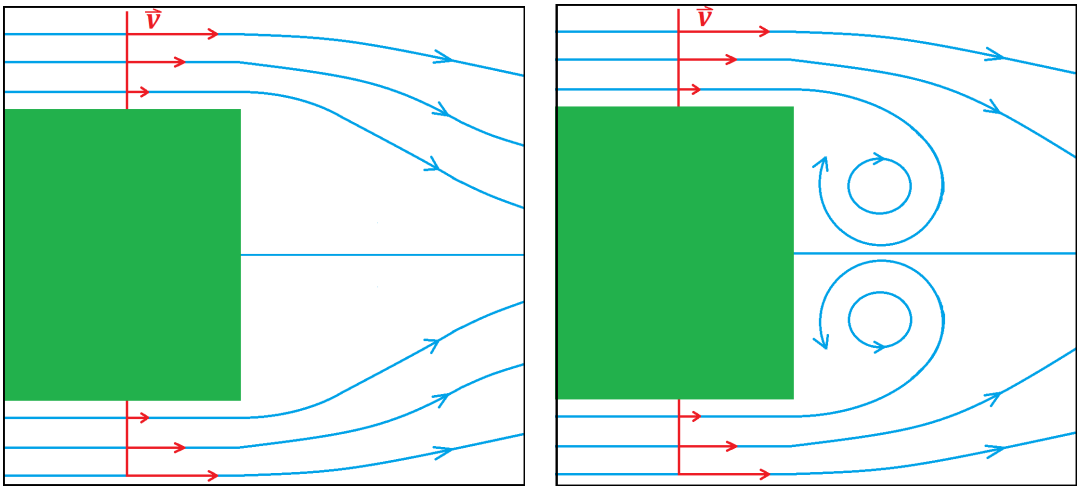
$$Re = \frac{\rho v L}{\mu}, \tag{1}$$

kjer je ρ gostota tekočine, v njena hitrost, μ viskoznost, L pa je tipična dimenzija prečnega preseka kanala. Ocenjuje se, da je tok tekočine v kanalu laminaren za $Re < 2000$ in turbolenten za $Re > 3500$. Za vmesne vrednosti Reynoldsovega števila pravimo, da imamo prehodni tok.

2.1 Nastanek vrtincev za oviro

Če v kanal, po katerem se pretaka tekočina, vstavimo oviro (npr. kvadrat ali krog), bodo ob pravih pogojih za oviro nastali vrtinci. Njihov nastanek lahko razložimo z uporabo Newtonove mehanike. Sila, ki okoli ovire vzdržuje laminarni tok, je strižna sila med plastmi tekočine oziroma viskozna sila. Zaradi te sile se tekočina na stiku z oviro ne giblje, z oddaljenostjo od stene pa njena hitrost narašča. Zaradi razlik v hitrosti

je takoj za oviro območje nižjega tlaka. Tekočino, ki priteče mimo ovire, tlačne sile preusmerijo proti simetrijski osi ovire. Pri počasnejših in bolj viskoznih tekočinah je tok za oviro laminaren (slika 2a), če pa se Reynoldsovo število poveča, se za oviro ustvarita dva simetrična vrtinca (slika 2b). To stanje ni stabilno, zato začne simetrijska os toka za oviro nihati. S časom se amplituda oscilacij toliko poveča, da se en vrtinec odlepi od ovire in se začne gibati v smeri toka. Simetrijska os toka nato zaniha do druge skrajne lege in odlepi se še drugi vrtinec. Tako za oviro izmenično nastajajo vrtinci, ki se vrtijo v nasprotnih smereh. Temu pojavu pravimo von Karmanova vrtinčna steza in ga lahko opazimo tudi v naravi, npr., ko oblaki potujejo mimo otoka (slika 3).



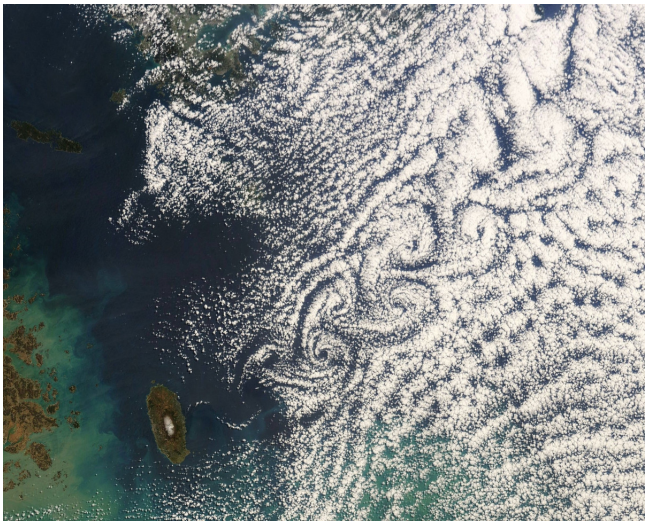
(a) (b)

Slika 2. Nastanek vrtincev za oviro. Z zeleno barvo je prikazana kvadratna ovira, modre črte so tokovnice, z rdečo pa so označene hitrosti ($\vec{v}$) delcev na tokovnici. Tok tekočine a) z manjšim in b) z večjim Reynoldsovim številom.

Frekvenca nastajanja vrtincev za oviro je povezana z brezdimenzijskim številom, imenovanim Strouhalovo število (St) [13]. Izračunamo ga z enačbo

$$St = \frac{fl}{v} \ , \tag{2}$$

kjer je f frekvenca nastajanja vrtincev, l tipična dimenzija prečnega preseka predmeta, v pa hitrost pretakanja tekočine. Strouhalovo število za pravokotno oviro je odvisno od razmerja dolžin stranic, kota zasuka ovire, od lastnosti toka (Reynoldsovo število) in še drugih dejavnikov. Eksperimentalni podatki kažejo, da se pri ovirah pravokotne oblike Strouhalovo število giblje med 0,1 in 0,2 [3]. S simulacijo bomo to preverili v diplomskem seminarju.



Slika 3. Satelitska slika von Karmanove vrtinčne steze oblakov za otokom [14].

2.2 Navier-Stokesova enačba

Gibanje nestisljive newtonske tekočine opisuje Navier-Stokesova enačba. To je parcialna diferencialna enačba, ki upošteva zakon o ohranitvi mase in gibalne količine za tekočine. Enačba opisuje, kako se hitrostno polje ($\vec{v}$) in tlak v tekočini (p) spreminjata s časom (t). V njej nastopajo še viskoznost (μ) in gostota (ρ) tekočine ter vsota vseh zunanjih sil ($\vec{F}$), ki delujejo na opazovano tekočino. Splošna Navier-Stokesova enačba se zapiše kot:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{F} \ . \tag{3}$$

Ker je za naše potrebe pomembnejša vrtinčnost tekočine ($\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$) kot hitrostno polje, na to enačbo delujemo še z rotorjem. Pri tem upoštevamo, da je vsota zunanjih sil na tekočino enaka 0, in vpeljemo kinematično viskoznost (ν), ki je definirana kot $\nu = \mu/\rho$. Dobimo naslednjo enačbo za vrtinčnost:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\, \vec{v} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} \ . \tag{4}$$

Vrtinčnost je sicer vektor, vendar imamo v dvodimenzionalnem sistemu samo eno komponento v smeri pravokotno na ravnino, po kateri se pretaka tekočina. Zato bomo vrtinčnost odslej obravnavali kot skalar. Da se popolnoma znebimo računanja s hitrostnim poljem, vpeljemo še tokovno funkcijo (ψ), za katero veljajo naslednja pravila:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{5}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6}$$

in

$$\nabla^2 \psi = -\omega \ , \tag{7}$$

kjer je v_x komponenta hitrosti v smeri osi x, v_y pa komponenta hitrosti v smeri osi y. Če upoštevamo enačbe (5) do (7) v enačbi (4), dobimo:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \ . \tag{8}$$

Povezavo med tokovno funkcijo in vrtinčnostjo smo že zapisali v enačbi (7), zdaj jo samo še izpišimo v kartezičnih koordinatah:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \ . \tag{9}$$

Dobili smo dve parcialni diferencialni enačbi (enačbi (8) in (9)), ki opisujeta gibanje tekočine v dvodimenzionalnem kanalu.

3 Numerični model

Za potrebe numeričnega izračuna, najprej vpeljemo brezdimenzijske količine:

$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= \frac{x}{L} \ , & \widetilde{y} &= \frac{y}{L} \ , & \widetilde{\nu} &= \frac{\nu}{v_0 L} \ , \\ \widetilde{\psi} &= \frac{\psi}{\psi_0} \ , & \widetilde{\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0} \ , & \widetilde{t} &= \frac{t}{t_0} \ , \end{aligned} \tag{10}$$

kjer je L širina kanala, v_0 pa karakteristična hitrost tekočine, ter

$$\psi_0 = v_0 L \ , \qquad \omega_0 = \frac{v_0}{L} \ , \qquad t_0 = \frac{L}{v_0} \ . \tag{11}$$

Enačbi (8) in (9) ob upoštevanju brezdimenzijskih parametrov in spremenljivk preoblikujemo v:

$$\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \widetilde{t}} = -\frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \widetilde{y}}\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \widetilde{x}} + \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial \widetilde{x}}\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial \widetilde{y}} + \widetilde{\nu} \left(\frac{\partial^2 \widetilde{\omega}}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\omega}}{\partial \widetilde{y}^2} \right) \ , \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial \widetilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \widetilde{\psi}}{\partial \widetilde{y}^2} = -\widetilde{\omega} \ . \tag{13}$$

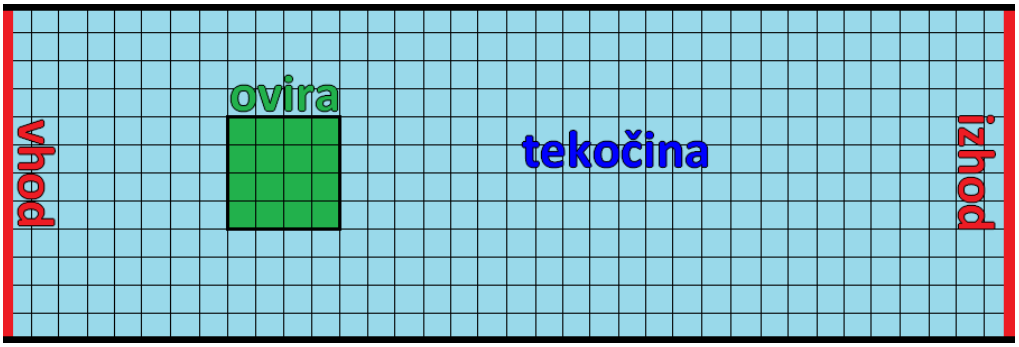
Za numerično reševanje sistema moramo diferencialne enačbe diskretizirati. Za diskretizacijo uporabimo centralno diferenčno shemo [7], kar pomeni, da za odvode prve in druge stopnje uporabimo naslednje zveze:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \,, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \,, \tag{15}$$

kjer je $f(x)$ poljubna funkcija spremenljivke x, h pa je integracijski korak v prostoru.

Programiranja simulacije se lotimo tako, da si najprej ustvarimo mrežo kvadratkov (slika 4). Vsak kvadratek predstavlja eno od točk v prostoru, ki so med seboj oddaljene za razdaljo h. Vsaka točka vsebuje vrednost tokovne funkcije in vrtinčnosti, ki se s časom spreminjata po enačbah (12) in (13). Na poljubno mesto v kanalu postavimo še oviro, okoli katere se pretaka tekočina. V programu oviro definiramo tako, da izberemo skupino kvadratkov, v katerih sta vrednosti $\widetilde{\psi}$ in $\widetilde{\omega}$ ves čas enaki 0.



Slika 4. Shema kanala s kvadratno oviro. Na levi strani tekočina priteka, na desni pa odteka. Zgornja in spodnja stranica predstavljata stene kanala, ob katerih tekočina miruje.

Za pravilno delovanje simulacije moramo definirati še robne pogoje. Tekočina se na stiku s površino ne premika, zato je njena hitrost na stranicah ovire ter na zgornji in spodnji plošči kanala enaka 0. Ker se nam tekočina po kanalu pretaka od leve proti desni, na obeh navpičnih stranicah nastavimo hitrost v_i v smeri vzdolž kanala. Tako določimo pritok in odtok tekočine iz opazovanega dela kanala.

Ker za računanje uporabljamo tokovno funkcijo in vrtinčnost, moramo robne in začetne pogoje določiti s tema dvema količinama. V začetnem stanju sta obe količini po celotnem kanalu enaki 0. Za tokovno funkcijo nastavimo še vrednosti na robovih kanala in ovire. Okoli ovire definiramo $\widetilde{\psi} = 0{,}5$, na spodnji stranici kanala $\widetilde{\psi}$ nastavimo na 0, na zgornji pa na 1,0. Na vhodu in izhodu vrednost tokovne funkcije od spodaj navzgor linearno narašča od 0 do 1,0 (slika 5). Za te parametre je hitrost tekočine na vhodu $v_i = v_0$. Da dobimo drugačne vstopne hitrosti, pa prilagodimo maksimalno vrednost $\widetilde{\psi}$ na robovih kanala. S temi pogoji za tokovno funkcijo ima tekočina na robovih hitrosti, ki smo jih opisali v prejšnjem odstavku.

Slika 5. Robni pogoji za tokovno funkcijo $\widetilde{\psi}$ v primeru, da je hitrost tekočine na vhodu $v_i = v_0$.

Da dosežemo stabilnost simulacije, moramo na vsakem časovnem koraku popraviti še vrednosti vrtinčnosti, kjer se tekočina dotika stene kanala ali ovire [15]. Pri tem popravku upoštevamo, da je hitrost tekočine na stiku s steno enaka 0. Uporabimo enačbo (9), kjer za odvode druge stopnje upoštevamo Taylorjev razvoj in jih diskretiziramo. Ugotovimo, da moramo ob navpičnih stenah uporabiti enačbo:

$$\omega_{i,j} = \frac{2\left(\psi_{i,j} - \psi_{i-1,j}\right)}{h^2} \ , \tag{16}$$

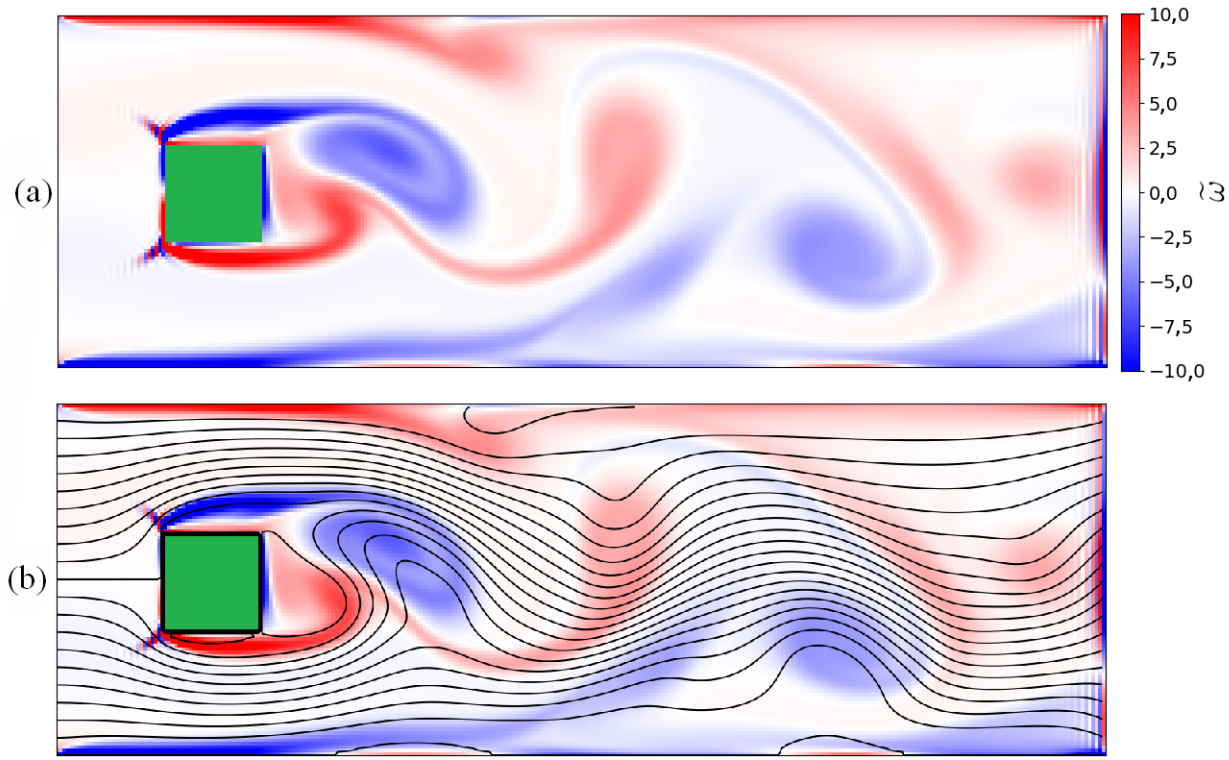
ob vodoravnih pa:

$$\omega_{i,j} = \frac{2\left(\psi_{i,j} - \psi_{i,j-1}\right)}{h^2} \ , \tag{17}$$

kjer sta i in j indeksa točke v prostoru, v kateri računamo vrtinčnost.

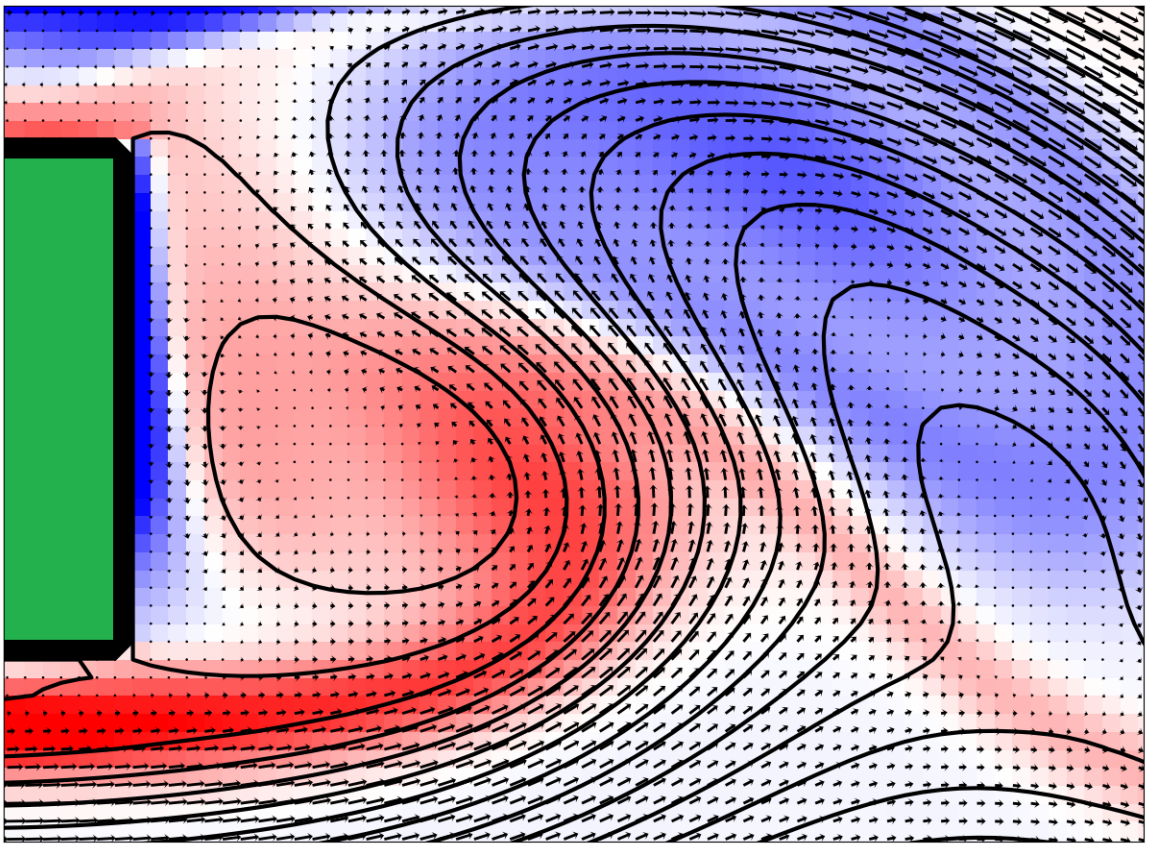
3.1 Simulacija in prikaz rezultatov

Glavni del simulacije je napisan v programskem jeziku *C++*, kjer program opravi vse izračune in rezultate zapiše v datoteke. Nato s programskim jezikom *python* te datoteke preberemo in s knjižnico *matplotlib* narišemo grafe. Za privzeto velikost mreže smo si izbrali 300 $\times$ 100 kvadratkov, kar nam zagotavlja dovolj natančne rezultate, ne da bi zanje računalnik potreboval preveč časa. Integracijski korak v času (dt) je nastavljen na 0,002, tako da 500 časovnih korakov v simulaciji predstavlja čas t_0. Za dolžinsko enoto si izberemo 1/100 širine kanala in jo v tem seminarju pišemo z oznako *en*. To pomeni, da če ima kvadratna ovira dolžino stranice 50 enot (50 en), zaseda polovico širine kanala. Ovira je v kanal postavljena tako, da se leva stranica kvadrata nahaja 30 enot desno od vhoda, zato da imamo za oviro več prostora za opazovanje vrtincev. Primer rezultata je prikazan na sliki 6a, kjer je ovira pobarvana z zeleno, modra in rdeča barva pa prikazujeta vrtinčnost. Vrtenje tekočine v smeri urinega kazalca je označeno z modro, nasprotna smer pa z rdečo barvo. Intenziteta barve prikazuje jakost vrtnčnosti oz. kako hitro se vrtinec vrti. Za izris slik smo vrednosti vrtinčnosti pomnožili s 4 in jih omejili med -10 in 10. Tako smo sliki povečali kontrast in s tem razločnost, ne da bi pri tem izgubili pomembne informacije o tekočini.



Slika 6. Prikaz rezultata simulacije a) samo vrtinčnost, b) vrtinčnost s tokovnicami. Ovira je pobarvana zeleno, z modro in rdečo barvo pa označimo vrtinčnost tekočine ($\widetilde{\omega}$).

Na sliki 6a vidimo, da za oviro izmenično nastajajo vrtinci, ki se vrtijo v nasprotnih smereh. Na osnovi tega sklepamo, da naša simulacija deluje pravilno in je v skladu s teoretično napovedjo. Za dodatne informacije o toku lahko narišemo še tokovnice (slika 6b). Dobimo jih s konturnim diagramom tokovne funkcije. Na sliki 6b opazimo, da se tam, kjer so tokovnice konkavno ukrivljene, vrtinci vrtijo v smeri urinega kazalca, na področjih konveksne ukrivljenosti tokovnic, pa ravno v nasprotni smeri. Ko narišemo še približano hitrostno polje za oviro (slika 7), vidimo, da so vektorji hitrosti v vsaki točki v prostoru tangentni na tokovnice.



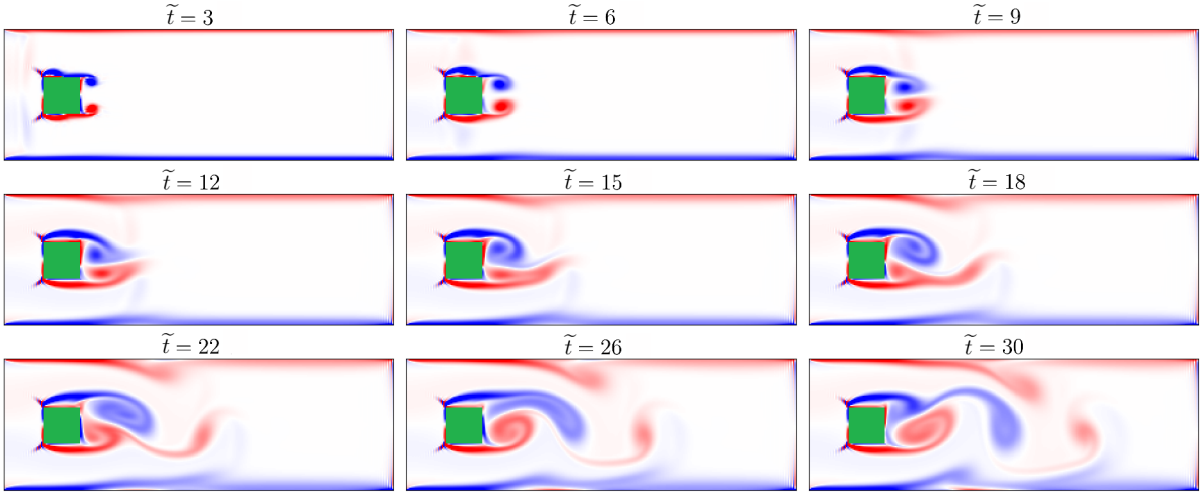
Slika 7. Slika vrtničnosti s tokovnicami in hitrostnim poljem tik za oviro. Puščice predstavljajo vektorje hitrosti tekočine v posamezni točki v kanalu. Vektorji hitrosti so tangentni na tokovnice.

4 Rezultati

Zdaj, ko imamo simulacijo narejeno in vemo, da deluje, sledi nekaj geometrijsko različnih primerov s pripadajočimi rezultati. Obravnavali smo primere z različnimi hitrostmi tekočine in velikostmi ovire ter dva primera z dvema ovirama v kanalu.

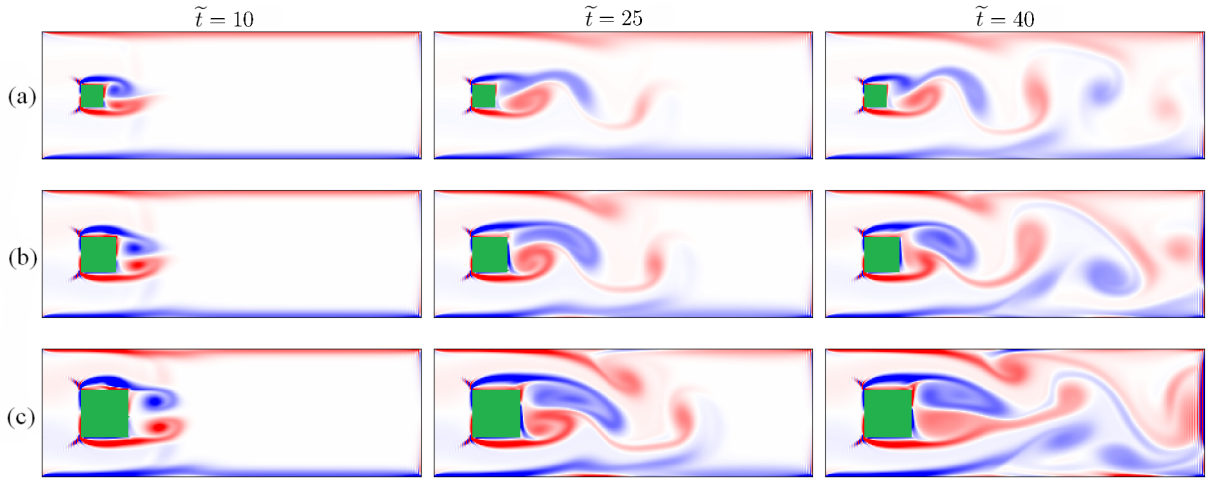
4.1 Kvadratna ovira na sredini kanala

Najprej poglejmo, kako za kvadratno oviro nastanejo vrtinci. Na sliki 8 je narisanih devet odsekov iz simulacije ob različnih časih. Za oviro simetrično nastajata dva vrtinca, ki po prvih devetih t_0 dosežeta končno velikost. Po $15t_0$ se simetrija začne rušiti, saj se modri vrtinec začne pomikati proti rdečemu. Ko modri zaniha predaleč proti rdečemu, se del rdečega vrtinca odlepi od ovire in tok ga odnese po kanalu naprej. Nato se smer nihanja obrne in rdeči vrtinec se začne gibati proti modremu, dokler se tudi ta ne odlepi od ovire. Tako v simulaciji prepoznamo von Karmanovo vrtinčno stezo.



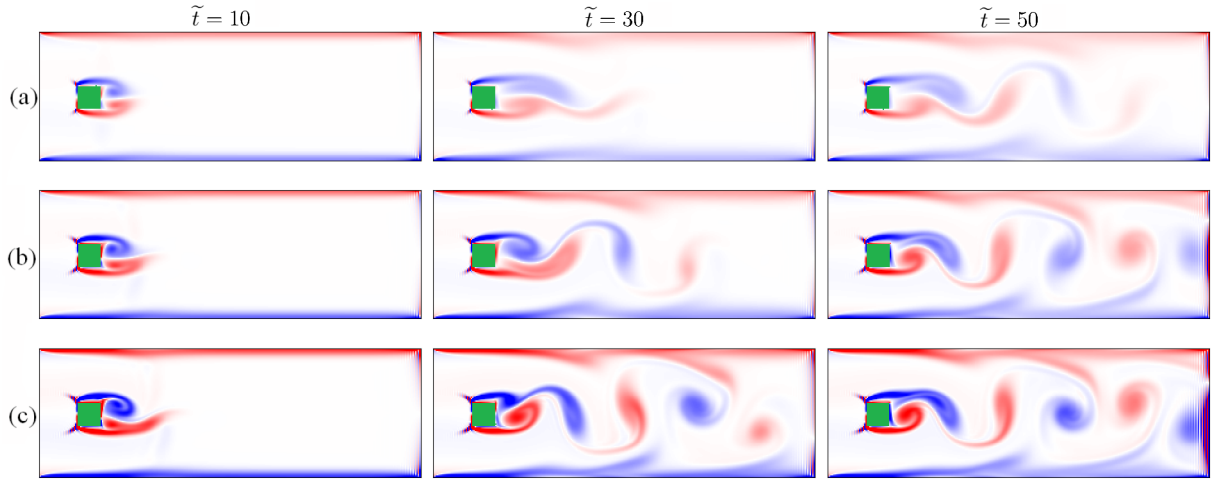
Slika 8. Prikaz nastanka vrtincev v simulaciji za kvadratno oviro z dolžino stranice 30 en v kanalu s širino 100 en ob različnih časih $\widetilde{t}$. Hitrost tekočine na vhodu je $v_i = v_0$.

Vpliv velikosti kvadratne ovire na vrtinčno stezo je viden na sliki 9. V kanal smo postavili kvadrate treh različnih velikosti z dolžinami stranice 20, 30 in 40 enot. Brezdimenzijska kinematična viskoznost tekočine je v vseh primerih enaka $\widetilde{\nu} = 10^{-3}$, hitrost na vhodu pa v_0. Najbolj očitna razlika med posameznimi primeri je v vplivu sten kanala na vrtinčno stezo za oviro. Če imamo večjo oviro, vrtinci nastajajo bližje stenam kanala, kar povzroči močnejšo interakcijo s počasnejšo tekočino na robu kanala. Zaradi teh interakcij se na stenah tvorijo vrtinci, ki se vrtijo v nasprotni smeri kot tisti, zaradi katerih nastanejo. Ti dodatni vrtinci so primerljivih dimenzij s tistimi za oviro in se pomikajo od roba proti sredini kanala.



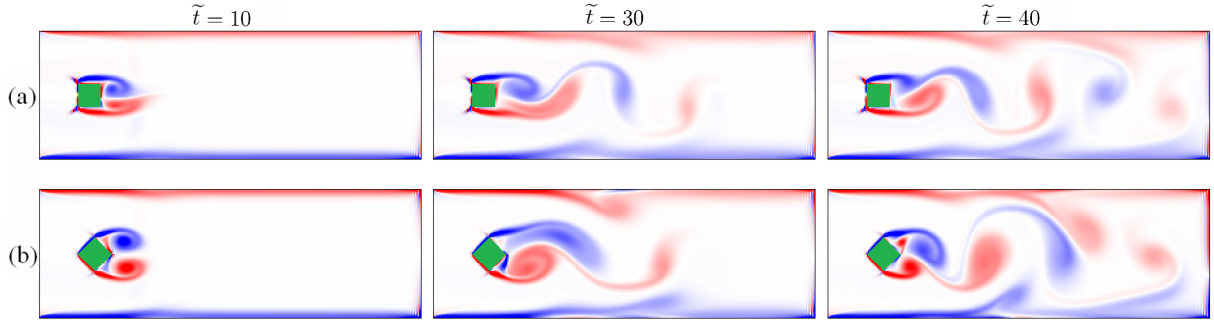
Slika 9. Vrtinčenje tekočine za kvadratnimi ovirami z dolžinami stranic a) 20, b) 30 in c) 40 enot pri vstopni hitrosti tekočine v_0. Rezultate smo primerjali pri treh različnih časih ($\widetilde{t}$).

Podobno kot za različne velikosti ovire si lahko pogledamo, kako hitrost tekočine na vhodu vpliva na vrtinčenje. Simulacijo smo zagnali s kvadratno oviro dimenzij 20×20 en, hitrosti na vhodu pa so bile $0{,}7v_0$, v_0 in $1{,}3v_0$ (slika 10). Opazimo, da pri večjih hitrostih tekočine vrtinci za oviro nastajajo hitreje. Pri hitrosti $1{,}3v_0$ po $30t_0$ nastaja že peti vrtinec, medtem ko se pri hitrosti $0{,}7v_0$ v enakem času še prvi ni popolnoma odlepil od ovire. Vidimo, da so vrtinci v hitrejši tekočini bolj okrogli, iz kontrasta barv pa razberemo, da se tudi vrtijo hitreje. Zanimivo je, da razdalja med vrtinci ni odvisna od hitrosti tekočine. To se dobro vidi na sliki 10, kjer so slike simulacije pri $\widetilde{t} = 50$. Vrtinci so pri vseh treh vstopnih hitrostih na približno enakih pozicijah v kanalu.



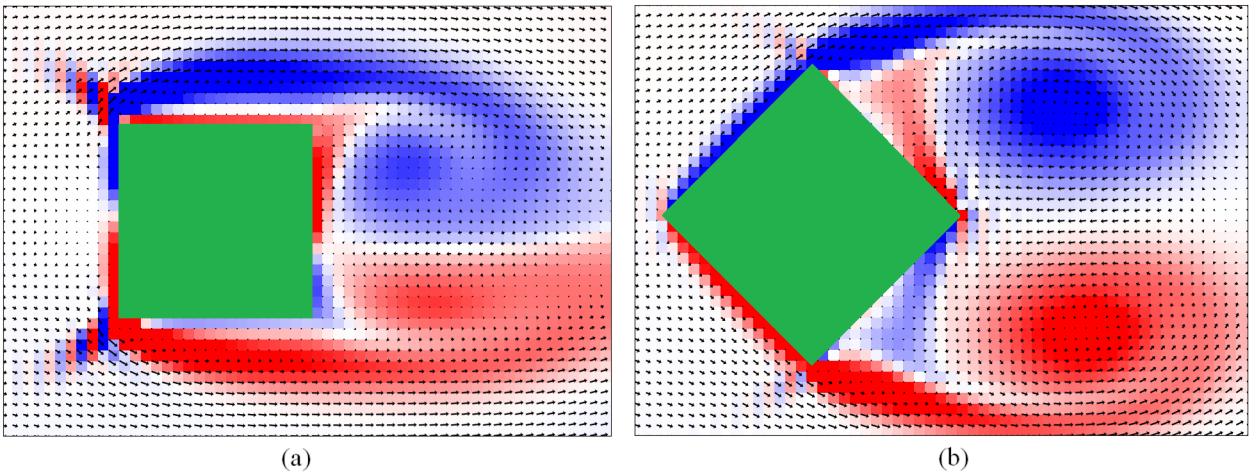
Slika 10. Vrtinci za kvadratno oviro s stranico 20 en ob treh različnih časih ($\widetilde{t}$), pri hitrostih tekočine na vhodu a) $0{,}7v_0$, b) v_0 in c) $1{,}3v_0$.

Poglejmo si še rezultate za kvadratno oviro, ki je zavrtena za kot $\varphi = 45°$. Na sliki 11 je prikazana primerjava med oviro, ki ima stranice vzporedne s kanalom, in oviro, ki je zavrtena za kot $\varphi = 45°$. Oba kvadrata imata dolžino stranice 20 enot, hitrost tekočine na vhodu je v_0, kinematična viskoznost pa je nastavljena na $\widetilde{\nu} = 10^{-3}$. Zaradi zasuka se poveča prečni presek ovire, zato opazimo, da se pri zavrtenem kvadratu vpliv tekočine pri steni poveča. Vidimo tudi, da se za zavrteno oviro tvorijo večji vrtinci, ki nastajajo počasneje.



Slika 11. Primerjava vrtinčenja tekočine za a) nezavrteno oviro in b) oviro zavrteno za kot $\varphi = 45°$. Ovira je dimenzij 20×20 enot, hitrost tekočine na vhodu je v_0, rezultate pa imamo prikazane ob treh različnih časih ($\tilde{t}$).

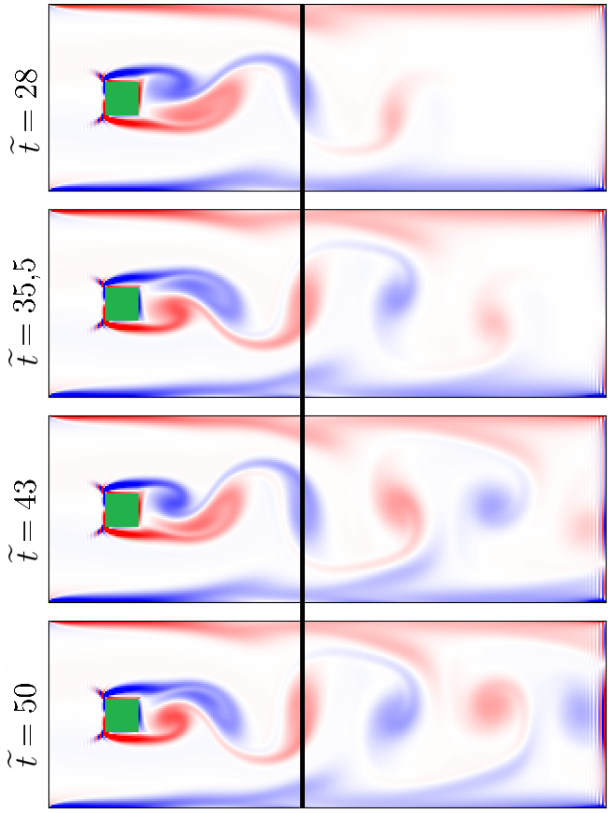
Na sliki 12 je prikazana primerjava hitrostnega polja med zavrteno in nezavrteno oviro. Vidimo, da so za zavrteno oviro boljši pogoji za nastajanje vrtincev. Tok se na sprednjem koncu razcepi, za oviro pa ima več prostora za tvorjenje večjih vrtincev.



Slika 12. Hitrostno polje za a) nezavrteno in b) zavrteno kvadratno oviro po $10t_0$. Ovira je dimenzij 20×20 enot, hitrost tekočine na vhodu pa je v_0.

4.1.1 Izračun Strouhalovega števila

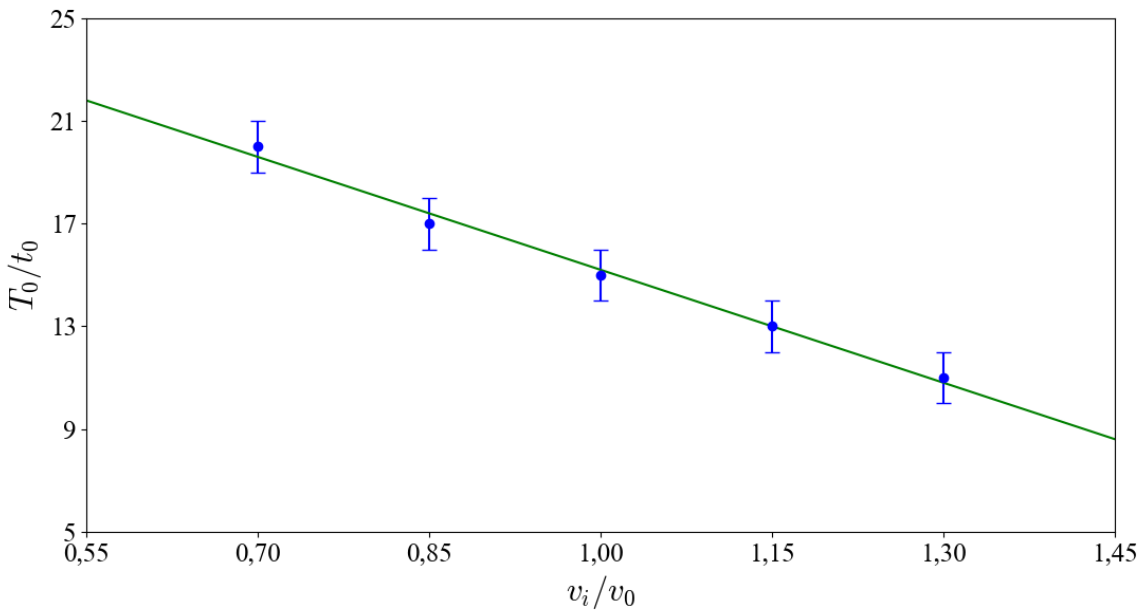
Za najmanjši kvadrat, kjer stene kanala nimajo večjega vpliva na tok, lahko izračunamo Strouhalovo število po enačbi (2). Dimenzijo prečnega preseka ovire imamo nastavljeno na 20 en, brezdimenzijski korak v prostoru pa je $h = 0{,}04$. Ko to dvoje zmnožimo, dobimo, da je $l = 0{,}8$. Iz izračunanega hitrostnega polja razberemo, da se pri vstopni hitrosti v_0 povprečna hitrost tekočine giblje okoli $\overline{v} = (0{,}25 \pm 0{,}01)v_0$. Čas, ki preteče, medtem ko dva vrtinca enakega tipa (moder oz. rdeč) potujeta skozi isto točko v kanalu, imenujemo nihanji čas (T_0). Iz slike 13 razberemo, da je $T_0 = (15 \pm 1)t_0$. Frekvenca in nihajni čas sta povezana z enačbo $f = 1/T_0$, zato lahko podatke vstavimo v enačbo (2) in dobimo $St = 0{,}21 \pm 0{,}02$.



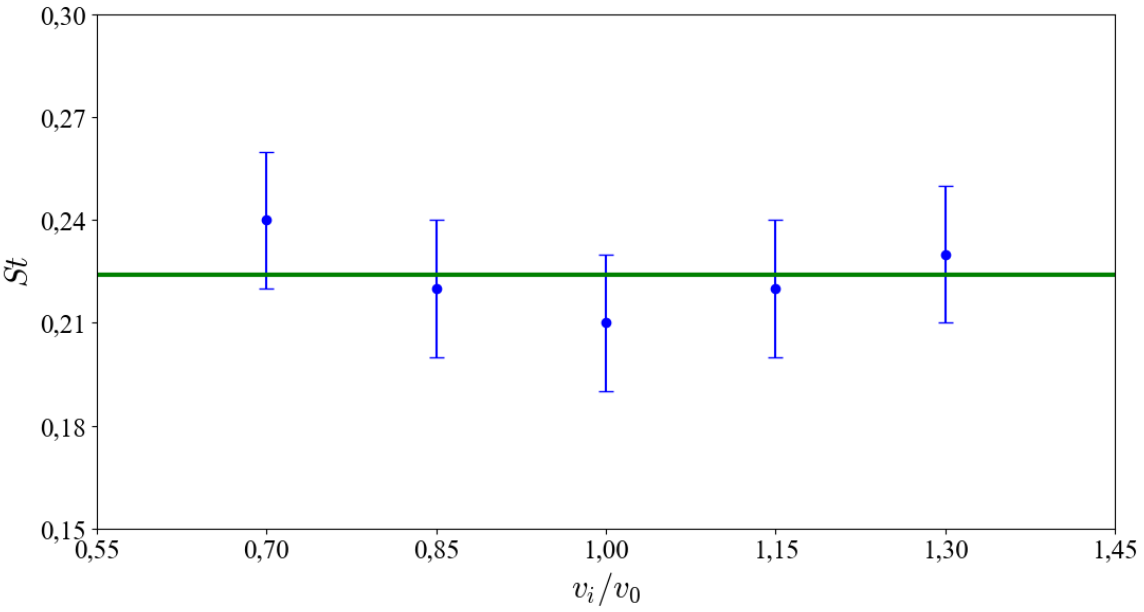
Slika 13. Odčitavanje frekvence nastajanja vrtincev za kvadratom velikosti 20×20 enot in hitrostjo tekočine v_0. Črna navpična črta predstavlja točko v kanalu, kjer ob časih $\widetilde{t}$ štejemo vrtince.

Po enakem postopku bomo zdaj izračunali Strouhalovo število za različne hitrosti na vhodu. Poleg primerov z vstopnimi hitrostmi tekočine $v_i = 0{,}7v_0$ ($\overline{v} = 0{,}17v_0$) in $v_i = 1{,}3v_0$ ($\overline{v} = 0{,}32v_0$) bomo uporabili še podatke za hitrosti $v_i = 0{,}85v_0$ ($\overline{v} = 0{,}21v_0$) ter $v_i = 1{,}15v_0$ ($\overline{v} = 0{,}28v_0$). Na sliki 14 imamo prikazano odvisnost nihanjega časa od hitrosti tekočine na vhodu. Vidimo, da se nihajni čas z večanjem hitrosti linearno zmanjšuje.

Iz zbranih podatkov izračunamo Strouhalova števila in narišemo diagram Strouhalovega števila v odvisnosti od hitrosti tekočine na vhodu kanala (slika 15). Graf nam pokaže, da je vrednost Strouhalovega števila, v mejah napake, enaka za vse dane hitrosti tekočine. Rezultat se v okviru napake ujema z eksperimentalnimi vrednostmi, ki se gibljejo med 0,1 in 0,2 [3].



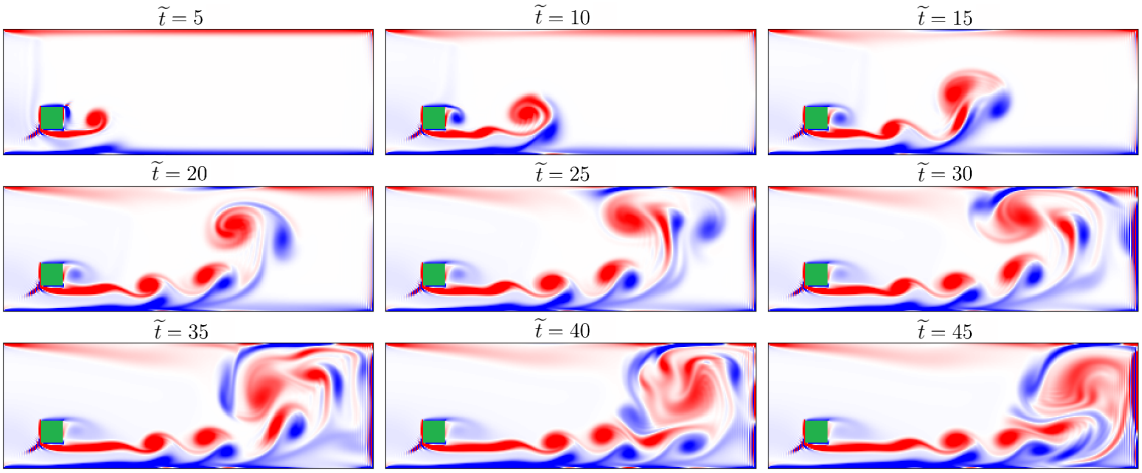
Slika 14. Odvisnost nihajnega časa (T_0) od hitrosti tekočine na vhodu kanala (v_i). Oznaka t_0 predstavlja karakteristični čas, v_0 pa karakteristično hitrost tekočine. Modre točke predstavljajo izmerjene podatke z napako, zelena premica pa je prilagojena na naše meritve.



Slika 15. Odvisnost Strouhalovega števila (St) od normirane hitrosti na vhodu kanala (v_i/v_0). Modre točke predstavljajo izmerjene podatke z napako, zelena premica pa je povprečna vrednost meritev, ki znaša $\overline{St} = 0{,}22 \pm 0{,}02$.

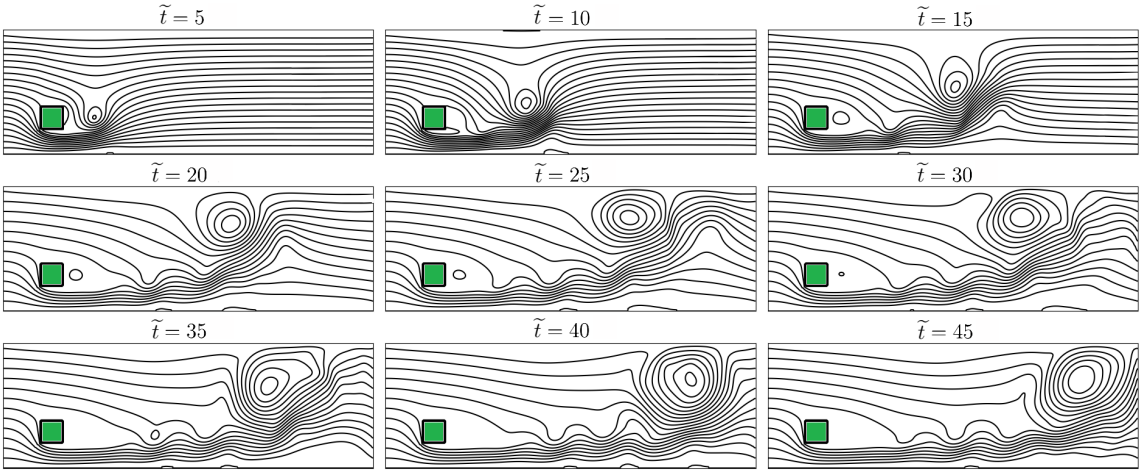
4.2 Kvadratna ovira, zamaknjena iz sredine kanala

Zanimive rezultate dobimo, če oviro pomaknemo iz sredine kanala proti robu. Za prvi poizkus smo oviro velikosti 20×20 enot iz centra zamaknili za 20 en (slika 16). Zdaj vrtinci nastajajo samo na spodnji strani ovire in se tvorijo vidno hitreje kot pri oviri v sredini kanala. Rdeči vrtinci potujejo blizu roba kanala, kjer nastajajo modri vrtinci, ki rdeče potisnejo proti sredini kanala. Zato pri izhodu dobimo velik, rdeč vrtinec, obdan s tekočino, ki se vrtinči v smeri urinega kazalca.



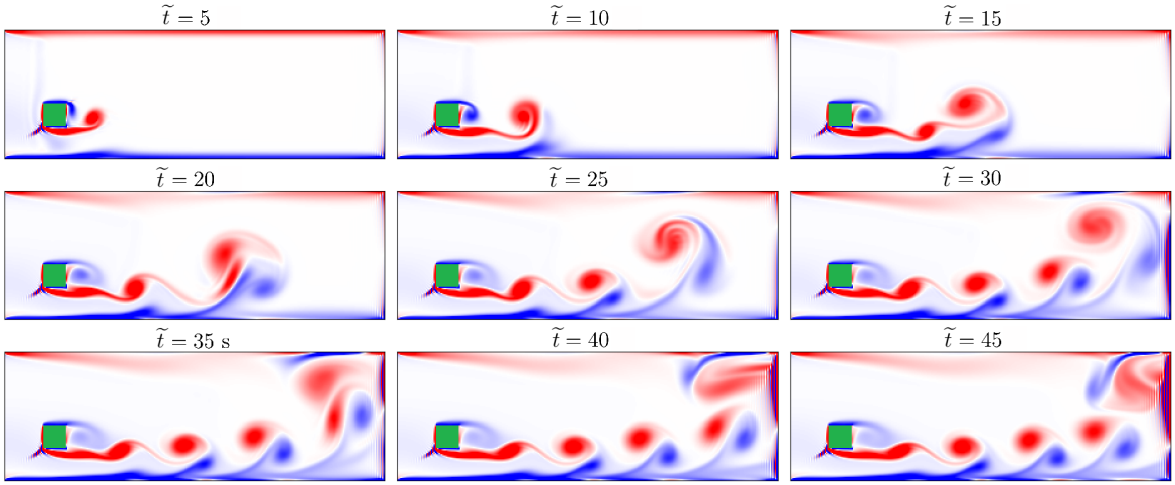
Slika 16. Vrtinčenje tekočine za oviro dimenzij 20×20 enot, ki je iz sredine kanala zamaknjena za 20 en. Hitrost tekočine na vhodu je v_0, $\widetilde{t}$ pa je brezdimenzijski čas v simulaciji.

Dodatne informacije o toku dobimo, če namesto vrtinčnosti narišemo tokovnice (slika 17). Vidimo, da so te pod oviro bolj zgoščene, kar nam pove, da je tam hitrost tekočine večja. Na teh slikah se razločno vidi tudi nastajanje večjega vrtinca na zgornji ploskvi kanala.



Slika 17. Enako kot slika 16, le da namesto vrtinčnosti narišemo tokovnice. Oznaka $\widetilde{t}$ predstavlja brezdimenzijski čas v simulaciji.

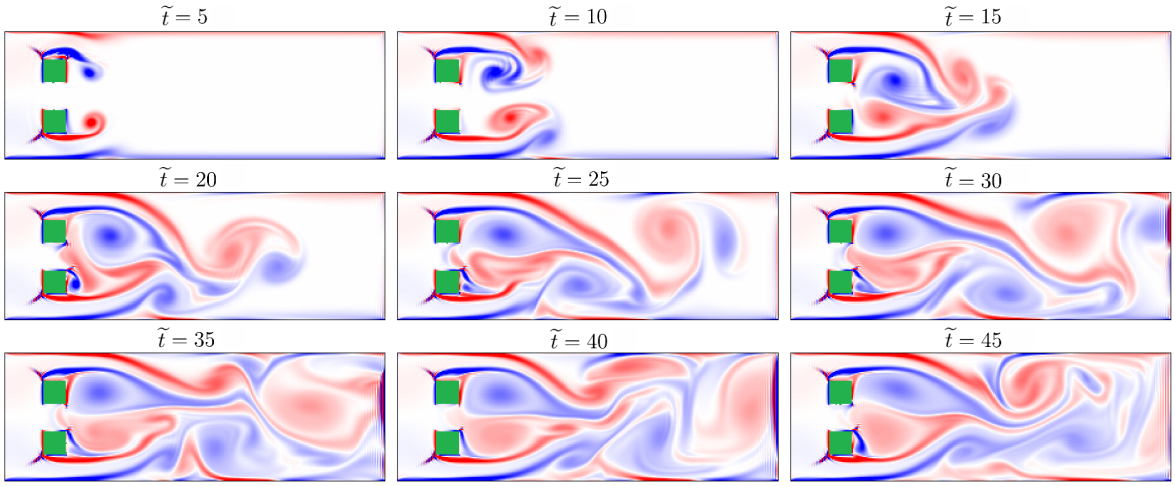
Če oviro iz središča pomaknemo samo za 15 en (slika 18), je vpliv stene manjši, zato se rdeči vrtinci počasneje pomikajo na drugo stran kanala. Po spodnji ploskvi dobimo vzorce, ki spominjajo na valove na vodni gladini. Ti v naravi nastanejo, ker zrak drsi ob vodni gladini in se zaradi trenja tvorijo manjši valovi, ki s časom zrastejo [16]. V naši simulaciji imamo podoben pojav, če za veter vzamemo rdeče vrtince, za vodo pa modre.



Slika 18. Vrtinčenje tekočine ob različnih časih $(\widetilde{t})$ za oviro dimenzij 20×20 enot, ki je iz sredine kanala zamaknjena za 15 en. Na spodnji stranici kanala dobimo vrtince, ki so podobni valovom na morski gladini.

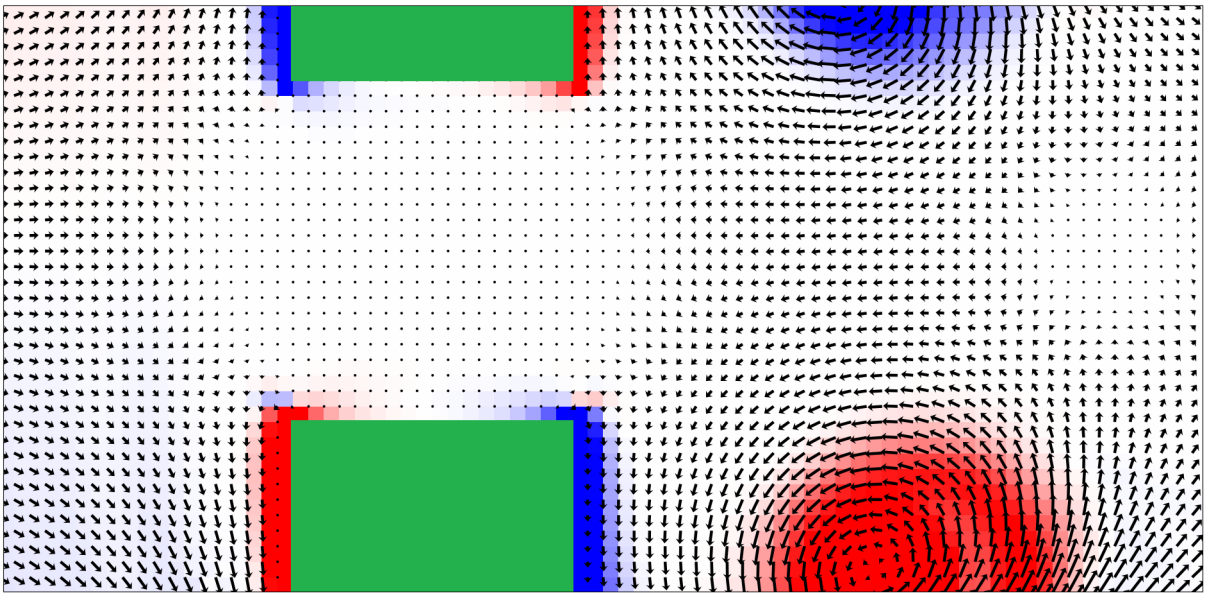
4.3 Dve oviri v kanalu

Poskus ponovimo še z dvema kvadratnima ovirama. Oviri sta enakih dimenzij, 20×20 enot, iz sredine kanala pa sta pomaknjeni za 20 enot (slika 19). Hitrost tekočine na vhodu je nastavljena na $v_i = v_0$, kinematična viskoznost pa ostaja nespremenjena, to je 10^{-3}.



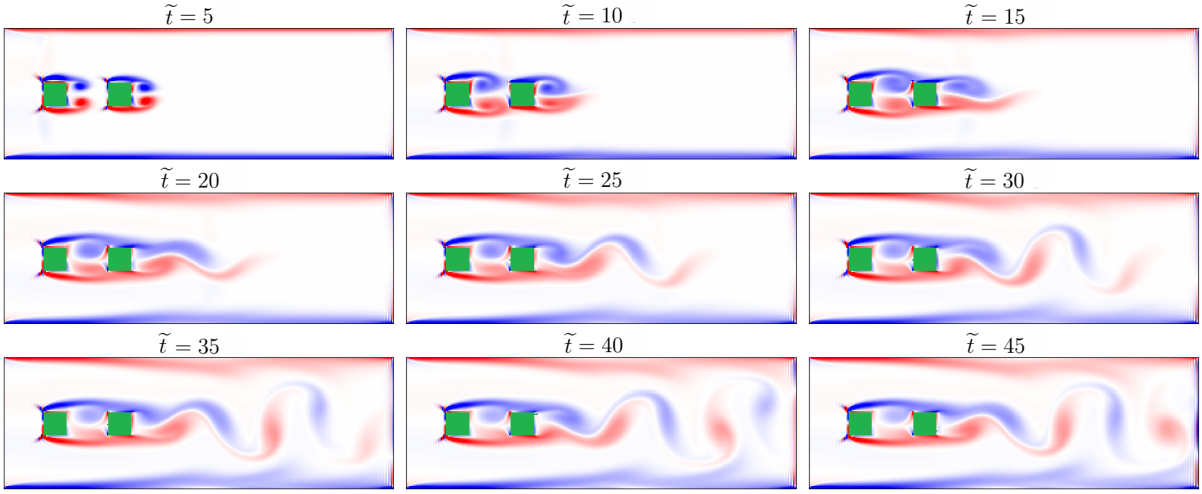
Slika 19. Dve enaki kvadratni oviri z dolžino stranice 20 en. Vsako na svojo stran izmaknemo iz sredine za 20 en. Hitrost vstopne tekočine je v_0, $\widetilde{t}$ pa predstavlja čas v simulaciji.

Vidimo, da vrtinci nastajajo samo pri stenah kanala in ne med ovirama. Če pogledamo hitrostno polje med ovirama (slika 20), opazimo, da se tekočina tam sploh ne pretaka. Sklepamo lahko, da ta zastoj med ovirama povzročita vrtinca, ki tekočino na sredini kanala potiskata v nasprotni smeri toka. Predvidevamo, da če postavimo oviri dovolj narazen, se bo tekočina začela pretakati tudi med njima. Za ovirama v takšni konfiguraciji se tvorijo relativno veliki vrtinci, ki močno interagirajo s tekočino ob steni kanala. Iz slike 19 razberemo, da se vrtinca ne odlepita od ovir, ker jima to preprečujejo vrtinci iz zgornje in spodnje stranice kanala.

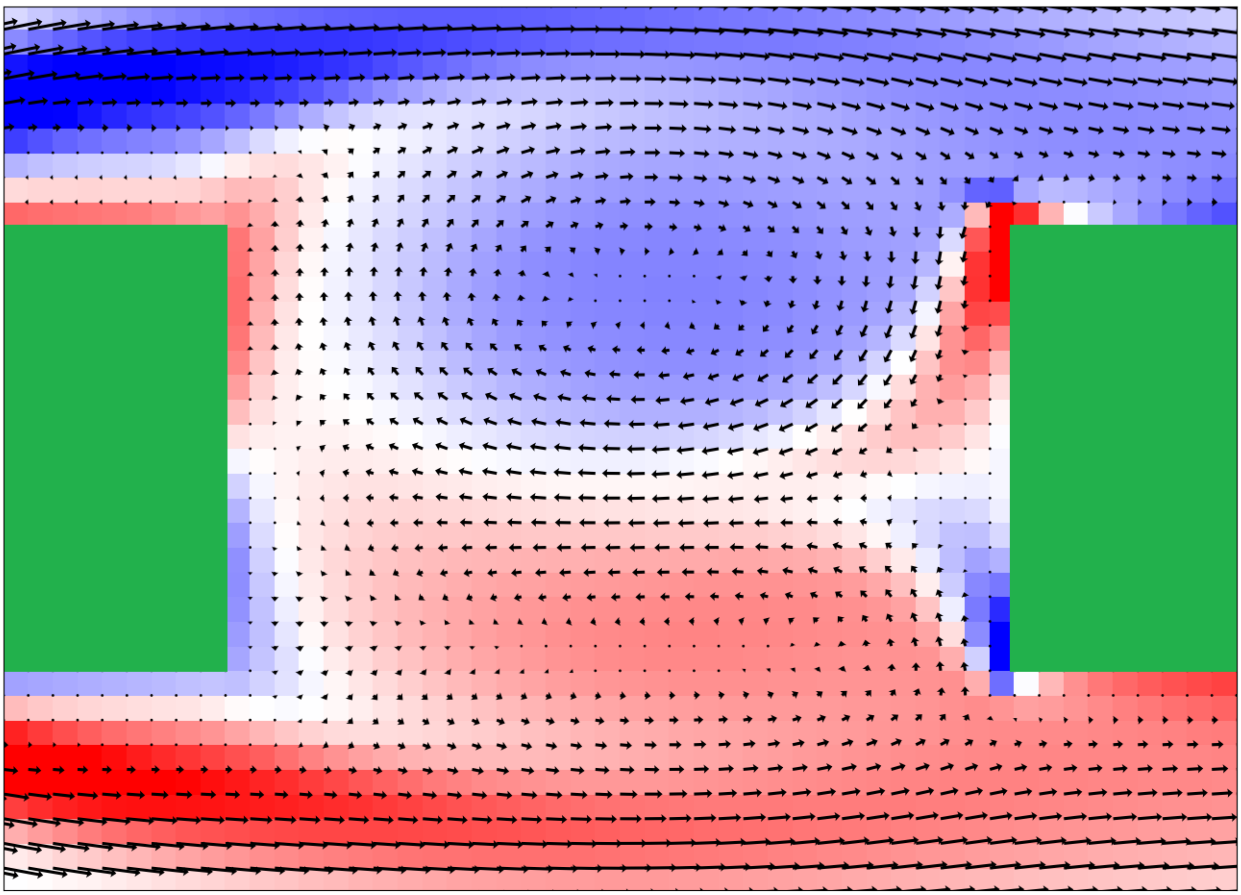


Slika 20. Hitrostno polje med vzporedno postavljenima ovirama po $5t_0$. Ostali parametri so enaki kot na sliki 19.

Za zadnji primer oviri postavimo na sredino kanala, in sicer drugo za drugo (slika 21). Razdalja med njima je 30 en, ostali parametri pa ostajajo enaki kot v prejšnjem primeru. Po prvih $10t_0$ za obema ovirama nastajata dva simetrična vrtinca, enako kot če bi v kanal postavili samo eno oviro. Po $20t_0$ se za drugim kvadratom začne tvoriti von Karmanova vrtinčna steza, vrtinca med prvo in drugo oviro pa se stabilizirata. Iz hitrostnega polja na sliki 22 razberemo, da vrtinca povzročita, da se tekočina na sredini med ovirama giblje v nasprotni smeri, kot teče tok okoli kvadratov.



Slika 21. Vrtinčenje tekočine za dvema enakima kvadratnima ovirama dimenzij 20×20 enot, postavljenima druga za drugo. Razdalja med njima je 30 en, hitrost vstopne tekočine pa v_0. Brezdimenzijski čas v simulaciji je označen s $\widetilde{t}$.



Slika 22. Hitrostno polje med zaporednima ovirama po $20t_0$. Ostali parametri so enaki kot na sliki 21.

5 Zaključek

V diplomskem seminarju smo izdelali simulacijo pretakanja newtonske tekočine po kanalu, v katerega vstavimo kvadratne ovire na različne načine. Glavni del simulacije je napisan v programskem jeziku *C++*, kjer program numerično rešuje sistem dvodimenzionalnih Navier-Stokesovih enačb in izračunane vrednosti za vrtinčnost, tokovno funkcijo in hitrostno polje zapisuje v datoteke. Te s programskim jezikom *python* preberemo in jih s knjižnico *matplotlib* vizualiziramo (slika 6).

V primerih, ko je bila ovira postavljena na sredino kanala, smo za njo dobili von Karmanovo vrtinčno stezo. Ugotovili smo, da se pri večjih ovirah ojača vpliv sten kanala (slika 9). Če povečamo hitrost tekočine, vrtinci postanejo bolj okrogli in se vrtijo hitreje, razdalja med njimi pa ostane nespremenjena (slika 10). Pogledali smo tudi, kaj se zgodi z vrtinci, ko kvadratno oviro zamaknemo iz sredine kanala (slike 16, 17 in 18), če jo zavrtimo za kot 45° (slika 11), in dva primera, ko v kanal postavimo dve enaki kvadratni oviri (slike 19—22). Ko smo oviro zamaknili iz sredine proti spodnji stranici kanala, smo dobil vrtince, ki spominjajo na obliko valov na morski gladini (slika 18). Ugotovili smo, da če dve oviri postavimo vzporedno, se v prostoru med njima tekočina ne pretaka (slika 20). Sklepamo, da to velja samo do določene razdalje med ovirama, ki pa je v tem seminarju nismo poiskali. Med zaporedno postavljenima ovirama tok teče v nasprotni smeri kot drugod po kanalu (slika 22).

Pri petih različnih hitrostih tekočine smo izračunali tudi Strouhalovo število. Ugotovili smo, da se to v odvisnosti od hitrosti tekočine (slika 15) ne spreminja in se v mejah merske napake ujema z eksperimentalnimi rezultati iz vira [3]. Preučili smo tudi, kako hitrost tekočine vpliva na frekvenco nastajanja vrtincev, in ugotovili, da je ta odvisnost linearna (slika 14).

V prihodnje bi si lahko pogledali vrtinčenje za ovirami različnih oblik (npr. trikotne, pravokotne, okrogle ...) v kanalih z bolj raznoliko geometrijo (npr. v obliki črke L ali U). Uporabili bi lahko širši kanal ali pa spremenili robne pogoje, tako da stene kanala ne bi vplivale na tok tekočine. Za natančnejše rezultate bi lahko povečali ločljivost mreže in jo razširili v vse tri dimenzije. Za to bi potrebovali zmogljivejši računalnik ali pa bi kodo optimizirali z uporabo različnih približkov. Rezultate bi lahko primerjali s profesionalnimi orodji, kot sta OpenFOAM [8] in ANSYS Fluent [9], za primerjavo z realnostjo pa bi lahko izvedli tudi namenski eksperiment.

Literatura

[1] T. von Karman, *Aerodynamics* (Cornell University Press, Ithaca, 1954).

[2] Wikipedija, *Tacoma Narrows Bridge (1940)*. Pridobljeno 21. 8. 2021 s `https://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940)`

[3] S. Kaneko, F. Inada, T. Nakamura, M. Kato, *Flow-Induced Vibrations* (Elsevier, Amsterdam, 2008).

[4] S. C. Yen, C. W. Yang, *Flow patterns and vortex shedding behavior behind a square cylinder*, J. Wind Eng. Ind. Aerodyn. **99**, 868-878 (2011).

[5] J. Park, J. R. Youn, Y. S. Song, *Hydrodynamic Metamaterial Cloak for Drag-Free Flow*, Phys. Rev. Lett. **123**, 074502 (2019).

[6] T. M. Squires, S. R. Quake, *Microfluidics: Fluid physics at nanoliter scale*, Rev. Mod. Phys. **77**, 977-1026 (2015).

[7] M. Griebel, T. Dornseifer, T. Neunhoeffer, *Numerical Simulation in Fluid Dynamics* (siam, Philadelphia, 1998).

[8] OpenFOAM, *OpenFOAM*. Pridobljeno 11. 8. 2021 s `https://www.openfoam.com/`

[9] ANSYS, *Ansys Fluent*. Pridobljeno 11. 8. 2021 s `https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent`

[10] Autodesk, *Autodesk CFD*. Pridobljeno 11. 8. 2021 s `https://www.autodesk.com/products/cfd/overview`

[11] CFDsupport, *Turbolence*. Pridobljeno 22. 7. 2021 s `https://www.cfdsupport.com/OpenFOAM-Training-by-CFD-Support/node334.html`

[12] P. K. Kundu, I. M. Cohen, *Fluid Mechanics - Third Edition* (Elsevier, Amsterdam, 2004).

[13] F. Durst, *Fluid Mechanics: An Introduction to the Theory of Fluid Flows* (Springer, Berlin, 2008).

[14] Scientific imaging, *Karman vortex streets*. Pridobljeno 22. 7. 2021 s `https://karlgaff.wordpress.com/karman-vortex-streets/`

[15] A. Salih, *Streamfunction-Vorticity Formulation* (Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram, 2013).

[16] I. R. Young, *Wind Generated Ocean Waves* (Elsevier, Amsterdam, 1999).