Univerza v Mariboru

Fakulteta za naravoslovje
in matematiko

PREVERJANJE HARMONIČNOSTI ALIKVOTNIH TONOV KLAVIRSKIH STRUN

Diplomski seminar na študijskem programu 1. stopnje Fizika

Mitja Kostanjevec

Mentor: izr. prof. dr. Robert Repnik

Maribor, 2020

ZAHVALA

Iskrena hvala gospodu Jožefu Bendi, lastniku klavirskega salona Benton v Mengšu, da mi je omogočil izvedbo meritev in podal svoje mnenje glede uglaševanja klavirjev.

KOSTANJEVEC M.: Preverjanje harmoničnosti alikvotnih tonov klavirskih strun

Diplomski seminar, Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Oddelek za fiziko, 2020

POVZETEK

V diplomskem seminarju preverjamo harmoničnost alikvotnih tonov klavirskih strun in preučimo vzroke za neharmoničnost. Prikažemo zgradbo klavirja in ključne dele, ki vplivajo na nihanje strune. Predstavimo pojem neharmoničnosti in njen vpliv na uglasitev klavirja ter primerjamo današnjo uglasitev klavirja z Railsbackovo krivuljo iz leta 1938. Za potrebe izračuna koeficienta neharmoničnosti izpeljemo valovno enačbo za togo struno in teoretično ter na podlagi meritev frekvenčnega spektra izračunamo koeficient neharmoničnosti strune in dobljena rezultata primerjamo. Ugotovimo, da je največja neharmoničnost v skrajnih legah klavirja, saj imajo najkrajše strune večji koeficient neharmoničnosti od strun v sredini klavirja. Najdaljše strune pa imajo koeficient podoben kot strune v sredini klavirja. Preučimo še neharmoničnost istih tonov na različno velikih klavirjih in ugotovimo, da so manjši klavirji bolj neharmonični.

Ključne besede: struna, alikvotni ton, harmonična vrsta, neharmoničnost, Railsbackova krivulja

ABSTRACT

In this diploma seminar we check the harmonicity of partial tones of piano strings and examine causes of inharmonicity. We present a structure of a piano and key parts that influence the virbation of strings. We introduce the concept of inharmonicity, its influence on the piano tuning and compare present piano tuning with the Railsback curve from 1938. For the purpose of calculation of the inharmonicity coefficient we use a wave equation for a stiff string and calculate the inharmonicity coefficient of the piano string, which we compare with the inharmonicity coefficient obtained from the frequency spectrum measurements. We find that inharmonicity is greatest in the extreme parts of the piano, because shortest strings have larger inharmonicity coefficient than those in the middle part of the piano. The longest strings have inharmonicity coefficient similar to the ones in the middle part of the piano. We also examine the inharmonicity of the same tones of differently sized pianos and find out that smaller pianos exhibit higher inharmonicity.

Key words: string, harmonic tone, harmonic series, inharmonicity, Railsback curve

Kazalo vsebine

1 Uvod ... 1
2 Valovanje na struni in neharmoničnost alikvotnih tonov ... 3
2.1 Neharmoničnost in uglasitev klavirja ... 3
2.2 Valovna enačba za togo struno ... 4
3 Meritve ... 8
3.1 Merilna oprema ... 8
3.2 Izvedba in analiza meritev ... 9
4 Rezultati ... 11
4.2 Primerjava neharmoničnosti alikvotnih tonov različnih klavirjev ... 14
4.3 Uglasitev in Railsbackova krivulja ... 15
4.4 Navidezni alikvotni toni ... 16
5 Zaključek ... 17

1 Uvod

Z zgodovinskim razvojem glasbenih sestavov so se v eni zasedbi pričeli združevati glasbeniki na zelo različnih glasbilih. Ker je za dober zven sestava potrebna čimboljša medsebojna uglašenost glasbil, je predvsem pri glasbilih z veliko strunami (čembalo, klavir, harfa) ali piščalmi (orgle) pomembna točnost uglasitve, saj glasbenik njihove uglasitve ne more prilagajati sproti, kot jo lahko na primer pri pihalih ali trobilih. V večjem sestavu, ki vsebuje poleg ostalih glasbil tudi klavir, orgle ali druga podobna glasbila, katerih uglasitev je zahteven in dolgotrajen proces, se vsa ostala glasbila vedno uglašujejo glede na klavir.

Klavir je eno najširše uporabljanih glasbil, saj se uporablja v skoraj vsaki glasbeni zvrsti. Začetki razvoja klavirja segajo v začetek 18. stoletja, ko so v Italiji zaradi želje glasbenikov po glasbilu, ki bi omogočalo bolj dinamično igro kot čembalo, izdelali prvi klavir, ki pa je imel manjši tonski obseg, kot ga ima danes [1]. Današnjo obliko in akustične lastnosti je koncertni klavir dobil med letoma 1790 in 1860. Pianino so razvili iz koncertnega klavirja v začetku 19. stoletja.

Današnji koncertni klavir (slika 1a) je dolg med 150 in 308 cm in tehta med 350 in 500 kg. Pianino (slika 1b) ima resonančno ploščo obrnjeno navpično in je visok med 100 in 140 cm ter tehta od 150 do 250 kg. Tipičen klavir ali pianino ima 88 tipk in okoli 230 jeklenih strun [2], od katerih je vsaka napeta s silo med 750 in 900 N. Debeline strun padajo od 8,5 mm za najnižje tone do 0,85 mm v zgornji oktavi klavirja [3]. Strune za nižje tone imajo poleg jedra iz jekla tudi bakreno navitje, kar omogoča nihanje pri nižji osnovni frekvenci ob isti dolžini strune.

a) b)

Slika 1. a) Koncertni klavir - Fazioli F278 [4] in b) pianino – Yamaha B3 121 [5]

V 19. stoletju so se z uvedbo enakomerno temperiranega sistema uglaševanja glasbil, ki je oktavo razdelil na 12 enakih poltonov, odprle možnosti objektivnega preučevanja uglasitev glasbil, saj sistem uglasitve določenega glasbila ni več vplival na njegov zven. Ker uglaševalci

niso imeli možnosti merjenja frekvenc, so nevede klavir uglaševali tako, da je razmerje frekvenc osnovnih tonov pri oktavi večje kot 2:1, saj je taka, raztegnjena uglasitev na uho prijetnejša. Kasnejši poskusi v 20. stoletju so pokazali, da tudi glasbeni nepoznavalci preferirajo raztegnjeno uglasitev klavirja napram neraztegnjeni enakomerno temperirani uglasitvi [6].

Zaradi izredne pomembnosti točne uglasitve ter iskanja optimalne uglasitve klavirja so fiziki skušali pojasniti vzroke za tipičen zven klavirja. Rayleigh je v 19. stoletju prvi predstavil vpliv togosti strune na harmoničnost njenih alikvotnih tonov (višjih harmonikov) in teoretično predvidel, da so alikvotni toni strune neharmonični, kar pomeni, da njihove frekvence niso popolnoma enake pravilnim večkratnikom v harmonični vrsti, ampak nekoliko odstopajo navzgor od pričakovanih. Tega ni mogel povezati s praktičnimi meritvami, saj še ni bilo na voljo merilnika, ki bi lahko dovolj natančno izmeril frekvenco. V sedemdesetih letih 20. stoletja je Rayleighovo delo dopolnil Fletcher, ki je definiral neharmoničnost alikvotnih tonov kot odstotek odstopanja frekvenc alikvotnih tonov od frekvenc, ki jih predpostavi harmonična vrsta, in izpeljal enačbo za neharmoničnost alikvotnih tonov strune [7]. Vpeljal je koeficient neharmoničnosti in ga tudi praktično izračunal iz meritev. Preučevanje vpliva neharmoničnosti alikvotnih tonov na uglasitev in zven klavirja je doživelo razmah z razvojem računalniške tehnologije, ki je proti koncu 20. stoletja končno omogočila zelo natančne meritve frekvenčnega spektra in tudi umetno sintezo tonov ter posledično lažjo analizo vpliva neharmoničnosti na človeško zaznavanje zvena klavirja [8].

Vpliv neharmoničnosti alikvotnih tonov na uglasitev klavirja lepo prikaže Railsbackova krivulja [9], ki prikazuje razliko med osnovnimi frekvencami tonov uglašenega klavirja in osnovnimi frekvencami tonov enakomerno temperiranega sistema v centih (stotinah poltona). V sklopu diplomskega seminarja bomo z analizo alikvotnih tonov klavirskih strun skušali ugotoviti, zakaj je tako težko najti optimalno uglasitev klavirja, saj se strokovni glasbeni krogi še vedno ne strinjajo glede tega, ali je uglasitev v skladu z Railsbackovo krivuljo optimalna ali pa je treba Railsbackovo krivuljo prilagoditi. Railsbackova krivulja iz leta 1938 sicer popolnoma zadosti teoretično postavljenim pogojem, da morata biti za občutek uglašenosti frekvenci dveh alikvotnih tonov enaki, ne upošteva pa deformacij na struni, vpliva akustične impedance resonančne plošče [3] in želja izvajalca po tem, kakšen zven naj ima klavir.

Cilj diplomskega seminarja je preučiti harmoničnost alikvotnih tonov klavirskih strun, pojasniti fizikalne vzroke za neharmoničnost in njen vpliv na uglasitev klavirja.

V drugem poglavju analiziramo valovanje na struni in poiščemo neharmonične rešitve valovne enačbe za togo vpeto struno. Merilno opremo in način izvedbe ter analize meritev predstavimo v tretjem poglavju. V četrtem poglavju grafično prikažemo neharmoničnost alikvotnih tonov in podamo rezultate izračuna koeficienta neharmoničnosti ter primerjamo današnjo uglasitev klavirja z Railsbackovo krivuljo z leta 1938. V zaključku seminarja povzamemo ugotovitve in predstavimo ideje za nadaljno delo.

2 Valovanje na struni in neharmoničnost alikvotnih tonov

Glasbeni teoretiki in izdelovalci glasbil so se stoletja ukvarjali z uvedbo primernih glasbenih lestvic. V sedemdesetih letih 18. stoletja je Rayleigh objavil knjigo *Teorija zvoka* (*The Theory of Sound*) [10], v kateri je prvič fizikalno predstavil problem vpliva togosti klavirske strune na neharmoničnost njenih alikvotnih tonov. Skoraj stoletje kasneje je leta 1962 Fletcher izpeljal enačbo za neharmoničnost strune za fiksno vpeto struno in vpeljal koeficient neharmoničnosti [7]. V nadaljevanju predstavimo vpliv neharmoničnosti na uglasitev klavirja in izpeljemo popravljeno valovno enačbo, ki upošteva vpliv togosti na nihanje strune.

2.1 Neharmoničnost in uglasitev klavirja

Osnovna frekvenca (ν) valovanja na klavirski struni vpeti na obeh koncih je

$$\nu = \frac{c}{2L}, \tag{1}$$

.kjer je c hitrost valovanja na struni in L dolžina strune. Osnovna frekvenca strune je torej obratno sorazmerna z dolžino. Pri klavirju s sedmimi oktavami frekvenčnega razpona to pomeni, da je najvišja frekvenca (ν_{max}) za 2^7-krat večja od najnižje (ν_{min}), torej $\nu_{max} = 128\,\nu_{min}$. Če bi želeli imeti v klavirju enako debele strune, bi to pomenilo, da je struna za najnižji ton 128-krat daljša od strune za najvišji ton, kar je seveda neizvedljivo in nesmiselno z vidika praktične izvedbe zgradbe klavirja. Da obidemo ta problem, se v klavirju uporabljajo precej toge strune, ki jih je tudi nenapete težje zviti kot na primer kitarske strune. V najnižjih 2,5 oktavah klavirja se uporabljajo strune, ki so okrog jeklenega jedra ovite z bakrom, da se poveča premer in posledično masa strun. Zaradi togosti (in bakrenega navitja) so alikvotni toni na struni neharmonični, torej njihove frekvence niso popolnoma enake pravilnim večkratnikom v harmonični vrsti, ampak malenkost odstopajo navzgor.

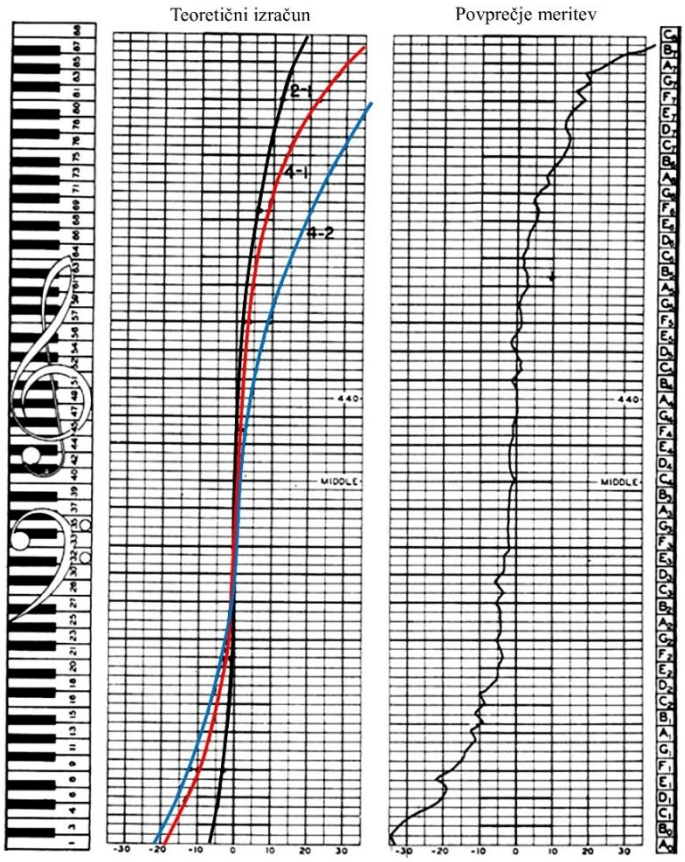
Neharmoničnost alikvotnih tonov strune v kombinaciji s temperiranim sistemom zelo zaplete uglasitvev klavirja. Oktava je teoretično definirana kot podvojitev osnovne frekvence, kar pomeni, da je razmerje frekvenc dveh katerihkoli zaporednih poltonov enako [11]

$$\frac{\nu_{N+1}}{\nu_N} = \sqrt[12]{2} \approx 1{,}05946 = 100 \text{ centov}, \tag{2}$$

kjer je N indeks tona oz. v primeru klavirja klavirske tipke in gre od 1 do 88.

Uglaševalci klavirjev pogosto uglašujejo medsebojne tone na klavirju s poslušanjem utripanja. Ko sta dve frekvenci blizu skupaj, slišimo počasno utripanje, ki se ustavi, ko sta frekvenci popolnoma enaki. Oktave na klavirju se uglašujejo tako, da uglaševalec posluša prvi alikvotni ton neke strune ($\nu_n \cong 2\,\nu_{1a}$, kjer je ν_{1a} frekvenca osnovnega tona te strune), in ga primerja s tretjim alikvotnim tonom druge strune ($\nu_n \cong 4\,\nu_{1b}$, kjer je ν_{1b} frekvenca osnovnega tona druge strune), ter željeni ton prilagaja dokler utripanje ne izgine. Zaradi neharmoničnosti pride pri

tem do raztegnjene uglasitve klavirja, kar je preučeval Railsback v 20. stoletju. Rezultati njegovega dela, ki še vedno velja za referenco pri uglaševanju klavirjev, so na sliki 2. Railsbackova krivulja je venomer vzpenjajoča, saj so frekvence alikvotnih tonov katerekoli strune višje od teoretičnih pričakovanj. Krivulja je najmanj strma v sredini, ker se klavir vedno uglašuje iz sredine navzven in se vpliv neharmoničnosti "nalaga" proti skrajnim legam. Na neharmoničnost vpliva tudi razmerje med presekom in dolžino strune: večje kot je to razmerje, večja je neharmoničnost [12], zato so manjši klavirji pri nižjih tonih bolj neharmonični, saj imajo krajše in debelejše strune kot večji.



Slika 2. Teoretična Railsbackova krivulja na levi strani grafa in desno povprečje uglasitev 16 različnih klavirjev [9]. Na vodoravni osi je odstopanje od pričakovane frekvence v temperiranem sistemu podano v centih – 1 cent je 1/100 poltona. Najnižji ton klavirja (A0) se na sliki nahaja povsem spodaj, najvišji (C8) zgoraj. Črno krivuljo dobimo z izenačevanjem frekvenc prvega alikvotnega tona (prva oktava) neke strune in osnovnega tona strune za oktavo višji ton. Rdeča krivulja predstavlja izenačitev frekvenc tretjega alikvotnega tona (druga oktava) neke strune in osnovnega tona strune dve oktavi višjega tona. Modro krivuljo pa dobimo z izenačitvijo frekvenc tretjega alikvotnega tona (druga oktava) in prvega alikvotnega tona (prva oktava) strune za oktavo višji ton.

2.2 Valovna enačba za togo struno

V primeru zelo elastičnih strun, kot so na primer kitarske strune, ki se upognejo že pod majhno prečno silo, nihanje strun dobro opiše valovna enačba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3}$$

kjer je $u(x,t)$ odmik strune dolžine L od ravnovesne lege na intervalu $x \in [-L/2, L/2]$ pri $t > 0$. Hitrost valovanja na struni (c) je definirana kot $c^2 = T/\rho$, kjer je T napetost v struni in ρ linearna gostota strune. Ker je struna na obeh koncih vpeta, veljata robna pogoja $u(-L/2, t) = u(L/2, t) = 0$. Da lahko valovno enačbo rešimo, potrebujemo še dva začetna pogoja. Izberemo začetno obliko strune $u(x,0) = \phi(x)$ in začetno transverzalno hitrost strune $\dot{u}(x,0) = \psi(x)$.

Valovna enačba (enačba (3)) za klavirske strune ne zadostuje in jih moramo zaradi izrazite neelastičnosti (togosti) obravnavati drugače, saj se za valovne dolžine, ki so primerljive s premerom strune, strune obnašajo podobno kot kovinske palice. V ta namen v enačbo (3) dodamo člen, ki predstavlja vpliv togosti na nihanje strune

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{QSR^2}{2\rho} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, \tag{4}$$

kjer je Q Youngov modul, S prečni presek strune in R njen polmer. Člen dodan k valovni enačbi se pojavlja tudi v enačbi togega nosilca (Euler-Bernoullijeva enačba) [13], ki opisuje upogib togega nosilca ob predpostavki, da v nosilcu ni strižne napetosti. Prvi del enačbe (4) torej predstavlja elastične lastnosti materiala (sposobnost povratka v začetno stanje po deformaciji), drugi del pa togost oz. nasprotovanje materiala spremembi oblike. Če imamo opravka s togim nenapetim materialom, ki ima velik Youngov modul ter je razmerje njegovega polmera in dolžine (R/L) veliko, v enačbi (4) prevlada drugi člen. Pri klavirskih strunah je pomembno predvsem razmerje R/L, ki se precej spreminja za različne strune klavirja in je najmanjše v sredini klavirja, kjer so strune tanke in dolge. V enačbi (4) zapišemo hitrost valovanja na struni kot $c^2 = T/\rho$ in dobimo enačbo [10]

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{QSR^2}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \tag{5}$$

Na tej točki definiramo koeficient neharmoničnosti (B)

$$B = \frac{\pi^2 QSR^2}{2TL^2}, \tag{6}$$

in osnovno frekvenco (ν_0), kot jo napove enačba (3)

$$\nu_0 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{7}$$

Osnovna frekvenca pri togi struni ni enaka najnižji slišani frekvenci ν_1 in je zgolj konstanta za določeno struno [14]. Zveza $\nu_0 = \nu_1$ bi veljala samo za idealno struno, ki ima koeficient neharmoničnosti enak 0. Rešitev enačbe (5) poiščemo z naslednjim nastavkom

$$u = Ce^{2\pi kx}e^{-2\pi i\nu t}, \tag{8}$$

kjer so C, k in ν parametri, ki jih dobimo tako, da nastavek iz enačbe (8) vstavimo v enačbo (5) in zadostimo robnim ter začetnim pogojem. Dobimo

$$k^4 - \frac{k^2}{4BL^2} - \frac{\nu^2}{16BL^4\nu_0^2} = 0\,. \tag{9}$$

Iz enačbe (9) lahko sklepamo, da za vsako frekvenco ν obstajajo 4 možne vrednosti k. Za vrednost k lahko predpostavimo $k = \pm k_1$, iz česar sledi

$$k_1^2 = \frac{1}{8BL^2}\left[\left(1 + \frac{4B\nu^2}{\nu_0^2}\right) + 1\right], \tag{10}$$

ali $k = \pm ik_2$, in dobimo

$$k_2^2 = \frac{1}{8BL^2}\left[\left(1 + \frac{4B\nu^2}{\nu_0^2}\right) - 1\right]. \tag{11}$$

Ko primerjamo enačbi (10) in (11), ugotovimo, da sta k_1 in k_2 povezana kot

$$k_1^2 - k_2^2 = 1/4BL^2. \tag{12}$$

Iz eksponentnega zapisa, ki smo ga vstavili iz enačbe (8) v enačbo (5) z Eulerjevo formulo preidemo na zapis s hiperboličnimi in kotnimi funkcijami. Splošna rešitev enačbe (5) je torej

$$\begin{aligned} u = e^{-2\pi i\nu t}[&K_1\cosh(2\pi k_1 x) + K_2\sinh(2\pi k_1 x) + K_3\cos(2\pi k_2 x) \\ &+ K_4\sin(2\pi k_2 x)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Rešitve enačbe (12) so neodvisne od robnih pogojev. Za vsako vrednost k_1 iz enačbe (12) dobimo pripadajočo vrednost k_2 in nato iz enačbe (9) pripadajočo frekvenco (ν). Za klavirsko struno lahko privzamemo, da je pripeta preko kapodastra in kobilice (slika 3), tako da velja $u(x,t) = 0$ in $\partial^2 u/\partial^2 x = 0$ pri $x = \pm L/2$ [7]. Iz tega sledi, da je vrednost k_1 enaka $n/2L$, kjer je n naravno število v harmonični vrsti. Ta zveza je enaka kot v primeru idealne strune, ki ni neharmonična, saj so načini nihanja za togo in idealno struno enaki. Razlika je samo v frekvencah nihanja, ki so pri togi struni višje, kot pri idealni struni [13]. Tako za vsako vrednost k_1 izračunamo ustrezno frekvenco ν_n iz enačbe (9) kot

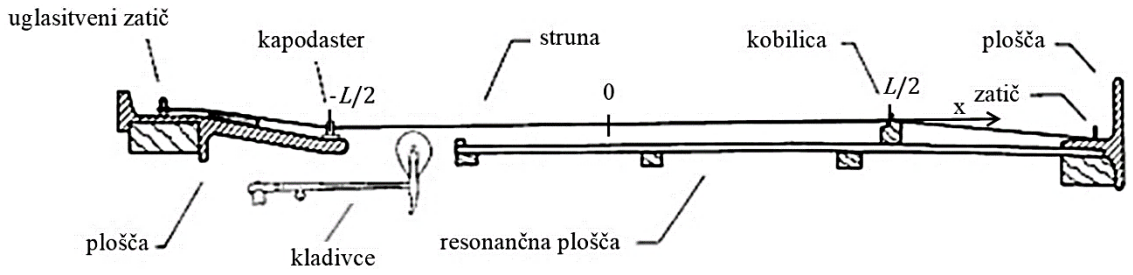
$$\nu_n = n\nu_0\sqrt{1 + Bn^2}\,. \tag{14}$$

Opazimo lahko, da nam enačba (14) poda večjo neharmoničnost za alikvotni ton, ki ima večji n. S povečevanjem n se torej veča neharmoničnost, neodvisno od osnovne frekvence strune.

Na tem mestu vpeljemo odstotke neharmoničnosti (H), ki podajajo odstopanje frekvence alikvotnega tona od frekvence, ki pripada harmonični vrsti osnovnega tona strune,

$$H = 100\left(\frac{\nu_n - n\nu_1}{n\nu_1}\right). \tag{15}$$

Odstotke neharmoničnosti vpeljemo zaradi risanja grafov neharmoničnosti alikvotnih tonov strun v odvisnosti od harmoničnega števila, ki nam olajšajo razumevanje meritev.



Slika 3. Bistvene komponente klavirja, od katerih je odvisen zven strune [15]. Definiramo $x = 0$ na sredini strune, da so robni pogoji simetrični.

Pri strunah za nižje tone, ki imajo poleg jeklenega jedra tudi bakreno navitje, enačbo (5) nekoliko prilagodimo, tako da upoštevamo spremenjeno linearno gostoto strun z navitjem. Presek (S_{nav}) bakrenega navitja lahko zapišemo kot

$$S_{nav} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2), \tag{16}$$

kjer je D premer bakrenega navitja in d premer jeklenega jedra. Linearno gostoto strune torej dobimo kot

$$\rho = \rho_{Fe}S_C + \rho_{Cu}S_{nav}\,, \tag{17}$$

kjer sta ρ_{Fe} in ρ_{Cu} volumski gostoti jekla in bakra; $S_C = (\pi/4)d^2$ pa je presek jeklenega jedra strune. Če je volumska gostota jekla 7,7 g/cm^3 in bakra 8,8 g/cm^3, dobimo naslednji izraz za linearno gostoto strune z bakrenim navitjem

$$\rho = 5{,}43\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}D^2 - 0{,}62\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}d^2\,. \tag{18}$$

Premera D in d v enačbo (18) vstavimo v centimetrih in dobimo linearno gostoto ρ v g/cm.

3 Meritve

Za preveritev harmoničnosti alikvotnih tonov klavirskih strun smo izmerili frekvenčni spekter strun treh različnih koncertnih klavirjev (Fazioli F278, Fazioli F212 in Kawai CS3 188) in enega pianina (Yamaha B3 121). Pri vseh klavirjih smo izmerili frekvenčni spekter za tone od A0 do A3, pri modelu Fazioli F278 pa tudi za tone od A4 do A7. Tonov od A4 do A7 pri ostalih klavirjih nismo merili, saj imajo vsi klavirji od srednje lege navzgor praktično enake strune ne glede na fizično velikost ohišja. Pripadajoče frekvence v temperiranem sistemu [16] za tone od A0 od A7 so v tabeli 1. Primerjava velikosti dveh izmed merjenih klavirjev je na sliki 4. Pri modelu Fazioli F278 smo izmerili tudi osnovne frekvence vseh strun za analizo uglasitve in izrisali Railsbackovo krivuljo za naš primer.

Ton	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
Frekvenca (Hz)	27,5	55	110	220	440	880	1760	3520

Tabela 1. Frekvence tonov od A0 do A7 za klavir z neraztegnjeno uglasitvijo v temperiranem sistemu

a) b)

Slika 4. Primerjava velikosti klavirjev a) Fazioli F278 [4] b) Fazioli F212 [17]. Opazimo lahko, da so strune od srednje lege navzgor (desna polovica glasbila) pri obeh klavirjih praktično enake.

3.1 Merilna oprema

Meritve smo izvedli z računalnikom z zvočno kartico Steinberg UR22 MK2 in kondenzatorskim mikrofonom AKG C414 ULS. Manjše nelienarnosti v frekvenčnem odzivu mikrofona niso ovira pri meritvah, saj so nas zanimale zgolj natančne frekvence in ne glasnost določenih frekvenc. Podatki so bili zajeti z demo verzijo programa AFMG SysTune, ki je bil sicer razvit za umerjanje zvočniških sistemov, ampak je omogočal dovolj natančne meritve frekvenčnega spektra za potrebe raziskave.

a) b)

Slika 5. a) Zvočna kartica Steinberg UR22 MK2 [18] in b) mikrofon AKG C414 ULS [19]

Dolžino strun za potrebe teoretičnega izračuna koeficienta neharmoničnosti smo izmerili s tračnim metrom z natančnostjo ±0,5 cm, debelino pa s kljunastim merilom z natančnostjo ±0,1 mm.

3.2 Izvedba in analiza meritev

Meritve na vseh štirih klavirjih so bile izvedene v enem dnevu v istem prostoru, in sicer v salonu klavirjev z vgrajenim prezračevalnim sistemom, ki omogoča zelo natančen nadzor nad temperaturo in vlažnostjo zraka. Zato lahko zanemarimo vpliv sprememb temperature in zračne vlažnosti na obnašanje strune, saj sprememb tekom enega dneva praktično ni. Pri postavitvi mikrofona smo pazili, da je vedno bil v podobni poziciji glede na struno, ki smo jo merili (slika 6). Pri pianinu to ni bilo možno, saj smo lahko merili le na zunanji strani resnonančne plošče, kjer strun ne vidimo. Kot bomo pokazali v nadaljevanju, je izmerjeni frekvenčni spekter zelo podoben tistim pri koncertnih klavirjih, zato ocenjujemo, da smo meritev kljub temu dovolj dobro izvedli.

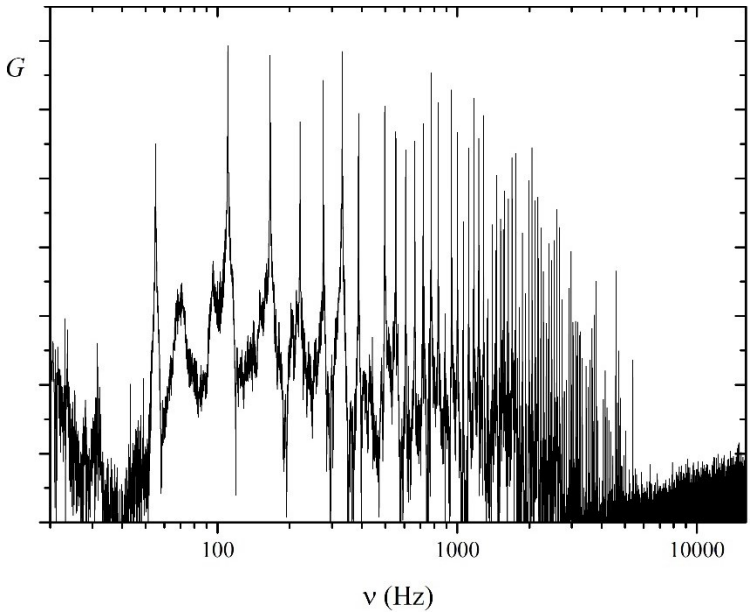
V programu SysTune smo nastavili frekvenco vzorčenja (ν_s) signala na 32 kHz, kar pomeni, da je zgornja mejna frekvenca meritve 16 kHz. Ob delovanju mikrofona med 20 Hz in 20 kHz torej vemo, da so možne izmerjene frekvence med 20 Hz in 16 kHz. Za čim večjo natančnost meritev smo povečali število vzorčenih točk (N_{FFT}) za hitro Fourieriovo transformacijo (FFT) na maksimum, ki ga omogoča program, in tako povečali časovno okno (T_0) zajema podatkov na

$$T_o = \frac{N_{FFT}}{\nu_s}. \tag{19}$$

Natančnost meritve frekvence je obratno sorazmerna časovnemu oknu [20], kar nam ob nastavitvi $N_{FFT} = 524288$ in vzorčenju signala pri 32 kHz omogoča resolucijo 0,06 Hz, kar je več kot dovolj natančno za naše potrebe.

Slika 6. Izvedba meritev. Mikrofon je na sliki postavljen za meritev frekvenčnega spektra tona A1.

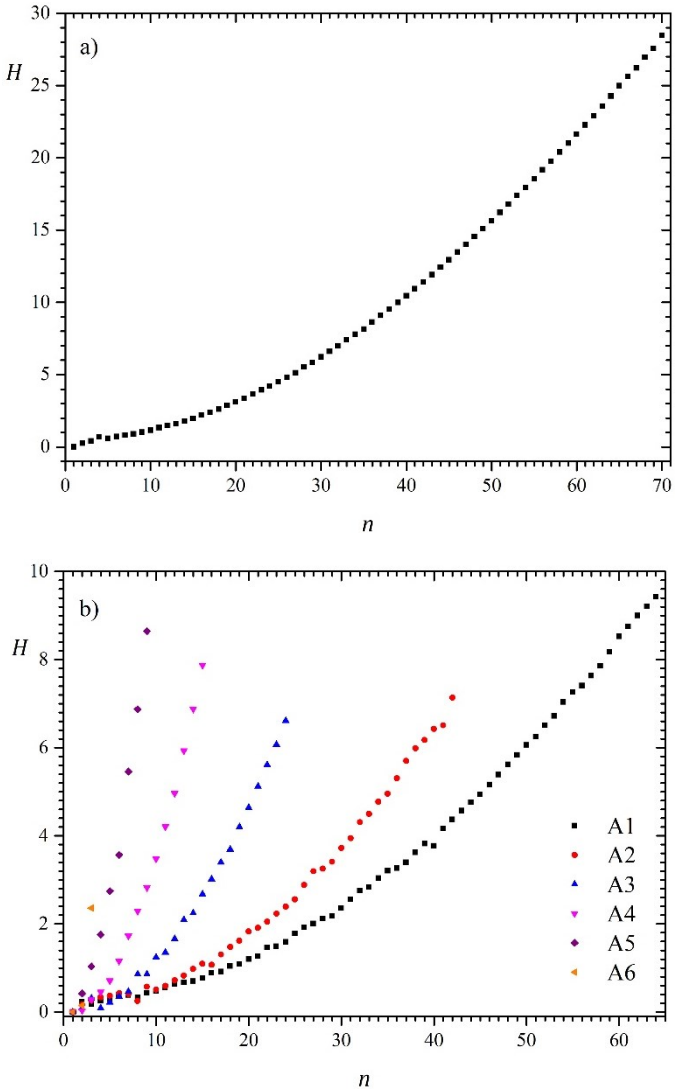
Frekvenčne spektre posameznih strun smo izvozili kot tekstovne datoteke in analizirali v programu za obdelavo grafov, kjer smo iz vsakega frekvenčnega spektra (slika 7) prebrali frekvence alikvotnih tonov.



Slika 7: Frekvenčni spekter tona A1. Na vertikalni skali je glasnost (G) v poljubnih enotah, saj nas ne zanima glasnost posameznih frekvenc ampak zgolj natančna frekvenca (ν) posameznega alikvotnega tona.

4 Rezultati

Slika 8 prikazuje odstotke neharmoničnosti (H) v odvisnosti od harmoničnega števila (n) za tone od A0 do A6 klavirja Fazioli F278. Odstotek neharmoničnosti smo izračunali po enačbi (15), kjer smo za ν_n vstavili izmerjeno frekvenco n-tega alikvotnega tona, za ν_1 pa frekvenco osnovnega tona strune. Z grafa razberemo, da se neharmoničnost eksperimentalno res povečuje z n, kot smo napovedali že z enačbo (14). Očitno je tudi, da se neharmoničnost povečuje nelienarno. Pri najdaljši struni v klavirju (ton A0) in oktavo višji struni za A1 dosežemo večjo neharmoničnost, vendar moramo upoštevati, da na zaznavanje višine tona najbolj vpliva prvih 4 do 6 alikvotnih tonov, zven strune pa skoraj povsem določi prvih 12 alikvotnih tonov [21]. Ko primerjamo samo prvih 10 alikvotnih tonov vsake strune, lahko opazimo, da je neharmoničnost verjetno večji problem v zgornji polovici klavirja, saj je prvih deset alikvotnih tonov pri A5 in A6 bistveno bolj neharmoničnih kot pri A0 in A1. Opazimo tudi, da je pri višjih tonih izraženih manj alikvotnih tonov, kar je verjetno povezano s tem, da te krajše in tanjše strune nimajo dovolj energije, da bi vzbudile alikvotne tone z zelo visoko frekvenco.



Slika 8. Odstotek neharmoničnosti (H) alikvotnih tonov s harmoničnom številom (n) a) za ton A0 in b) za tone od A1 do A6 klavirja Fazioli F278.

Ker je ob absolutni napaki meritve frekvence 0,06 Hz in osnovnem tonu A0 (27 Hz) relativna napaka okoli 0,2%, pri višjih frekvencah pa še manj, pri izračunih in risanju grafov napake ne upoštevamo. Izračun koeficienta neharmoničnosti na podlagi meritev dolžine in debeline strune (enačbi (7) in (8)) je bolj primerjalne narave, da lahko primerjamo teoretični model z dejansko struno, katere frekvence alikvotnih tonov smo izmerili karseda natančno. Znano je tudi, da na višino alikvotnih tonov vpliva tudi resonanca zaradi akustične impedance resonančne plošče [3], ki jo je težko razložiti, ker so lastnosti resonančne plošče lastne vsakemu posameznemu klavirju. Pojav resonance povzroči pozitivno povratno zanko, kar pomeni, da če struna niha pri frekvenci, ki je malo nižja od resonančne, jo akustična impedanca prisili v nihanje pri še nižji frekvenci in obratno. Vpliv tega pojava je v našem primeru večji od napake meritve, kar potrdi, da merske napake pri izračunih ni potrebno upoštevati, saj lahko akustična impedanca spremeni frekvenco tudi za 1 Hz ali več [22].

4.1 Koeficient neharmoničnosti

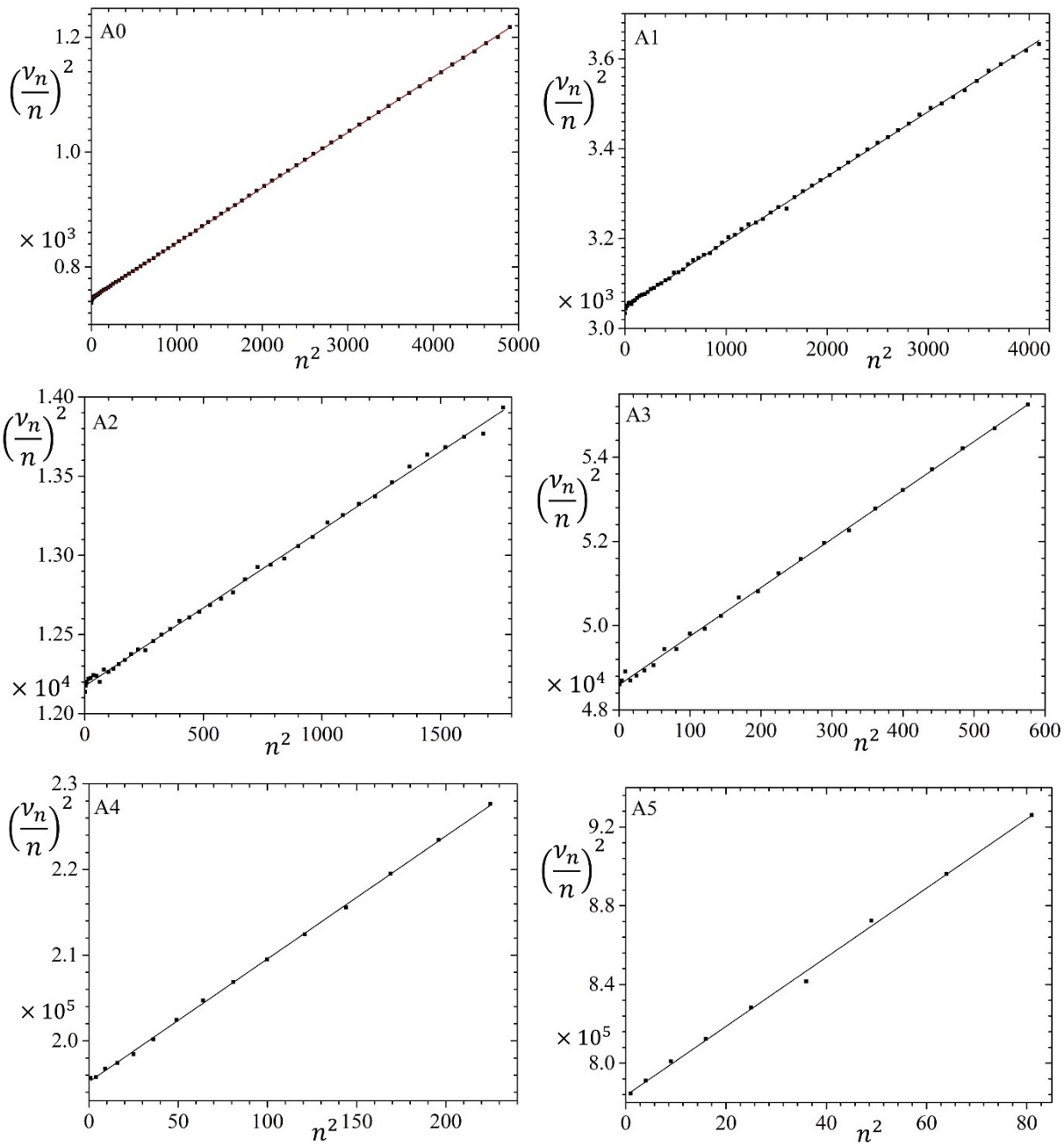
Enačbo (14) lahko kvadriramo in dobimo

$$\left(\frac{\nu_n}{n}\right)^2 = B\nu_0^2 n^2 + \nu_0^2 \,. \tag{20}$$

Iz tega sledi, da lahko narišemo graf $(\nu_n/n)^2$ v odvisnosti od n^2 in mu prilagodimo linearno funkcijo, ki seka ordinatno os pri ν_0^2 in ima smerni koeficient $B\nu_0^2$. Na vseh grafih na sliki 9 se linearna funkcija dobro prilega izmerjenim potekom točk. Začetna vrednost ν_0^2 in smerni koeficient grafa $B\nu_0^2$ sta bila izračunana v programu za obdelavo grafov. V tabeli 2 so zbrani izračunani eksperimentalni koeficienti neharmoničnosti (B_{eksp}) na podlagi meritev frekvenčnega spektra za sedem strun od A0 do A6 klavirja Fazioli F278. Že v prejšnjem poglavju opažen trend večje neharmoničnosti pri višjih tonih potrdimo tudi v tem primeru, saj imajo krajše strune večji koeficient neharmoničnosti. Koeficient neharmoničnosti lahko za primerjavo izračunamo tudi neposredno iz lastnosti strune (dolžine in debeline) po enačbah (6) in (7). Rezultati teoretičnih izračunov (B_{teor}) so v tabeli 2.

Struna	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
B_{eksp}	0,000129	0,000047	0,000081	0,000238	0,00073	0,0022	0,0063
B_{teor}	0,00015	0,00013	0,00012	0,00047	0,0034	0,027	0,21
B_{teor}/B_{eksp}	1,2	2,8	1,5	2,0	4,7	12	33

Tabela 2. Eksperimentalno ugotovljeni koeficienti neharmoničnosti (B_{eksp}) in teoretično izračunani koeficienti neharmoničnosti (B_{teor}) za sedem strun A0-A6 klavirja Fazioli F278. Napaka pri vseh koeficientih je na prvem nenavedem veljavnem mestu. B_{teor}/B_{eksp} je faktor odstopanja teoretično izračunanega koeficienta od eksperimentalno pridobljenega.



Slika 9: Grafi $(\nu_n/n)^2$ v odvisnosti od n^2 s prilegajočo linearno funkcijo za šest strun klavirja Fazioli F278. n je harmonično število, ν_n pa frekvenca določenega alikvotnega tona. Smerni koeficient prilegajoče linearne funkcije je enak $B\nu_0^2$, začetna vrednost pa ν_0^2.

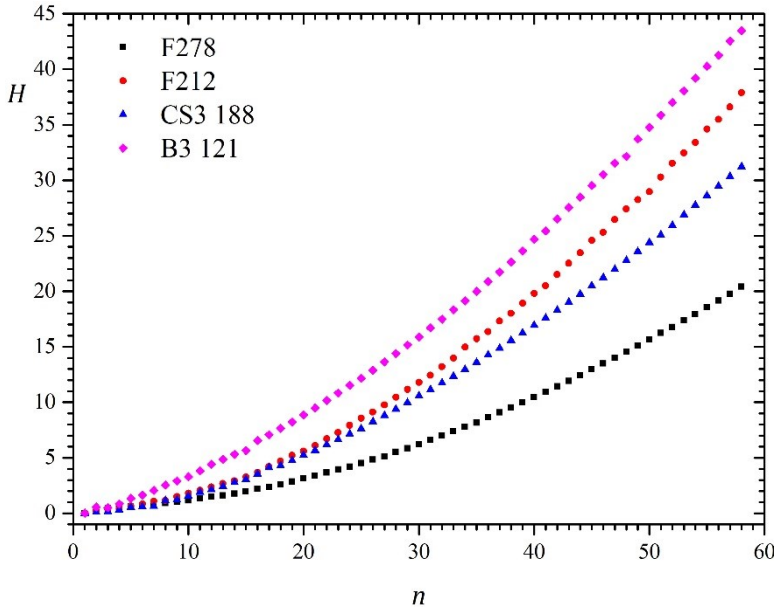
V skladu s strokovno literaturo, ki za zadovoljivo ujemanje koeficientov predpostavlja odstopanje manjše od faktorja 5 oz. polovice velikostnega reda, lahko trdimo, da se teoretičen izračun koeficienta neharmoničnosti dobro ujema z eksperimentalno ugotovljenim koeficientom za nižje tone, ki smo ga izračunali iz smernega koeficienta in začetne vrednosti linearne funkcije na sliki 9. Za strune od A4 navzgor pa se odstopanje med B_{eksp} in B_{teor} povečuje, česar pa ne znamo natančno pojasniti in bi bila potrebna bolj podrobna analiza vplivov na nihanje strune. Pri tem bi verjetno v enačbo (5) vnesli še kakšen člen, saj očitno trenutna enačba ne opiše zadovoljivo nihanja strune. Zaradi velikega odstopanja med obema

izračunanima koeficientoma lahko trdimo, da bolj natančna meritev dolžine in debeline strune za potrebe teoretičnega izračuna koeficienta zaenkrat ni smiselna, saj tudi 10% relativna napaka pri meritvi debeline ne more povzročiti enega velikostnega reda razlike med izračunoma. Če bi teoretični izračun koeficienta nadgradili, da bi dobili rezultate bližje eksperimentalno dobljenemu koeficientu (B_{eksp}), bi bila bolj natančna meritev zagotovo smiselna – predvsem pri meritvi debeline strune. Trenutno lahko teoretično izračunan koeficient služi kvečjemu za orientacijo za nadaljno delo, če bi se lotili popravkov modela.

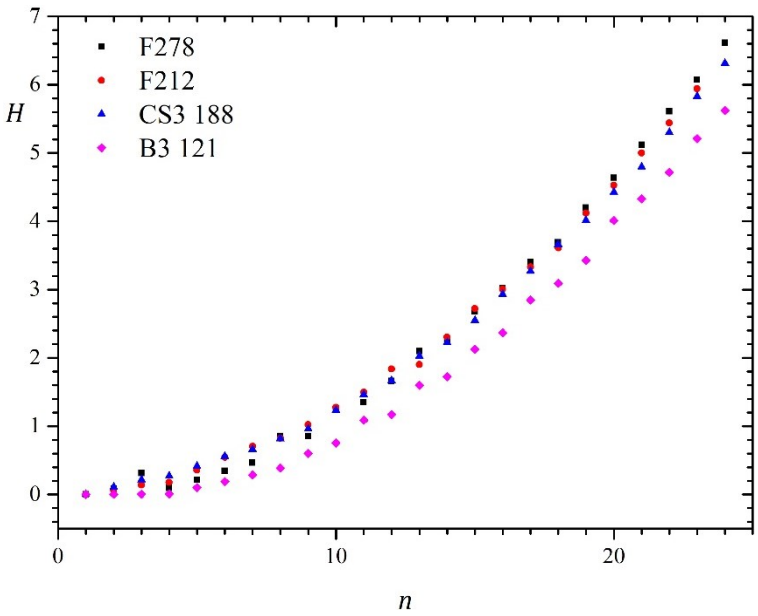
4.2 Primerjava neharmoničnosti alikvotnih tonov različnih klavirjev

Na sliki 10 so predstavljeni odstotki neharmoničnosti alikvotnih tonov za ton A0 štirih klavirjev. Opazimo, da je največji klavir Fazioli F278 najmanj neharmoničen, najmanjši pianino Yamaha B3 121 pa najbolj. Zanimivo in neskladno s pričakovanji je A0 na Kawaiu CS3 188 manj neharmoničen od Faziolija F212, saj bi pri krajši struni pričakovali večjo neharmoničnost. Vzrokov za to ne znamo natančno pojasniti, lahko pa ugibamo, da so razvijalci pri Kawaiu skušali zmanjšati neharmoničnost alikvotnih tonov [23] te strune z drugače proizvedeno struno, saj ta klavir tudi zveni precej drugače od ostalih treh v tej legi.

Da je naša predpostavka o nepotrebnosti meritev vseh klavirjev od srednje lege navzgor, zaradi zelo podobnih strun na vseh klavirjih, smiselna, lahko vidimo na sliki 11, kjer je očitno, da je neharmoničnost alikvotnih tonov zelo podobna na vseh klavirjih že pri tonu A3, kar se pokaže tudi z izračunanimi koeficienti neharmoničnosti, ki so za ta ton zelo podobni pri vseh štirih klavirjih (tabela 3).



Slika 10. Odstotek neharmoničnosti (H) alikvotnih tonov tona A0 štirih klavirjev v odvisnosti od harmoničnega števila (n) za določen alikvotni ton.



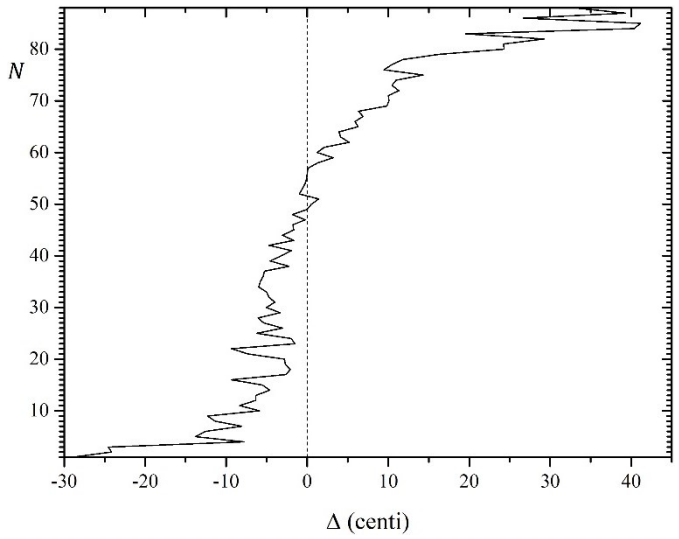
Slika 11. Dostotek neharmoničnosti (H) alikvotnih tonov tona A3 štirih klavirjev v odvisnoti od harmoničnega števila (n) za določen alikvotni ton.

Struna	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6
B_{F278}	0,000129	0,000047	0,000081	0,000238	0,00073	0,0022	0,0063
B_{F212}	0,000261	0,000081	0,000098	0,000228	/	/	/
$B_{\mathrm{CS3\ 188}}$	0,000205	0,000120	0,000117	0,000221	/	/	/
$B_{\mathrm{B3\ 121}}$	0,000295	0,000116	0,000121	0,000207	/	/	/
B_{Fletcher}	0,000352	0,000135	0,000114	0,000401	0,000526	0,00186	0,00380

Tabela 3. Eksperimentalno ugotovljeni koeficienti neharmoničnosti (B) za 7 strun štirih klavirjev, za katere smo izmerili frekvenčni spekter in primerjava z eksperimentalnimi koeficienti neharmoničnosti Fletcherja iz leta 1964. Trimestna številka pri vsakem koeficientu predstavlja celotno dolžino modela koncertnega klavirja oz. višino pianina. Najdaljša struna v vsakem je nekoliko krajša od tega podatka.

4.3 Uglasitev in Railsbackova krivulja

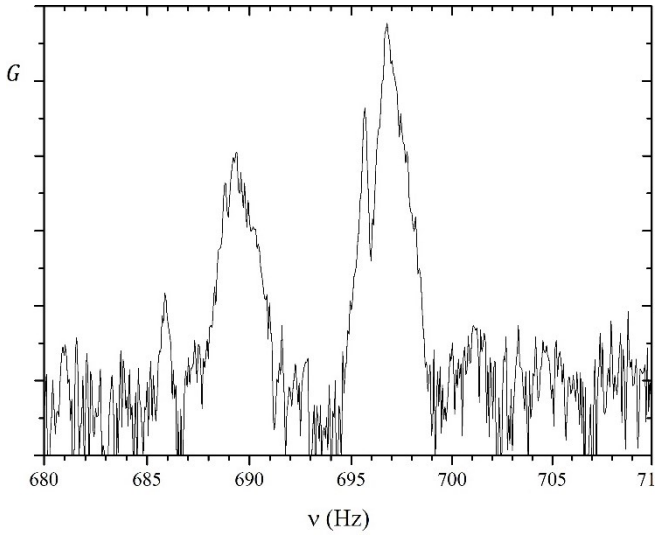
Za analizo uglasitve smo izmerili prve vzbujene frekvence vsakega posamičnega tona klavirja Fazioli F278. Na sliki 12 je Railsbackova krivulja odstopanja prvih vzbujenih frekvenc v centih (enačba (2)). Odstopanje od neraztegnjene temperirane uglasitve [15] je izračunano na podlagi enačbe (2). Odstopanje v obeh skranjih legah je v skladu z Railsbackovo krivuljo iz leta 1938. Ta graf tudi potrdi navedbe uglaševalca klavirjev, gospoda Bende, da klavirje uglašuje tako, da zvenijo čimbolj naravno in so čim širše uporabni, kar je bil cilj Railsbacka. Se pa tudi on strinja, da je za kakšne posebne glasbene sestave oz. žanre potrebno prilagoditi uglasitev klavirja, da le ta zveni drugače, odvisno od potreb in želja pianista. Na podlagi teh ugotovitev lahko trdimo, da je uglasitev klavirja v skladu z Railsbackovo krivuljo še danes optimalna in najširše uporabna, kljub temu pa je za določene potrebe lahko zaželjeno in upravičeno tudi odstopanje od Railsbackove krivulje.



Slika 12. Railsbackova krivulja (indeks (N) klavirske tipke v odvisnosti od odstopanja (Δ) od neraztegnjene temperirane uglasitve) uglasitve za klavir Fazioli F278. Pri N = 1 najnižji ton klavirja A0 in pri N = 88 najvišji ton C8.

4.4 Navidezni alikvotni toni

Pri odčitavanju frekvenc alikvotnih tonov v programu alikvotnih tonov so se občasno pojavljali dvojni vrhovi v razmiku nekaj Hz. Izkazalo se je, da se na struni vzbudijo nihanja, ki povzročijo navidezne alikvotne tone (ang. phantom partials). Do tega pride, ker je poleg transverzalnega valovanja na klavirski struni možno vzbuditi tudi longitudinalno valovanje – kot nekakšno longitudinalno valovanje vzmeti. Longitudinalno valovanje, ki povzroča navidezne alikvotne tone se najpogosteje pojavlja pri frekvenci, ki je vsota dveh nižjih alikvotnih tonov. Na sliki 13 je navidezni alivkotni ton pri frekvenci, ki je vsota 12. in 13. alikvotnega tona strune A0 in je nekaj Hz nižja od 25. alikvotnega tona. Matematičen izračun frekvenc navideznih alikvotnih tonov [24] je možen, ampak presega namen tega seminarja.



Slika 13. Navidezni alikvotni ton pri frekvenci ν = 689 Hz in dejanski alikvotni ton pri ν = 697 Hz. Na vertikalni skali je glasnost (G) v poljubnih enotah, saj nas absolutna glasnost ali razlika v glasnosti med alikvotnima tonoma ne zanimata.

5 Zaključek

V diplomskem seminarju smo obravnavali neharmoničnost alikvotnih tonov klavirskih strun in vpliv neharmoničnosti na uglasitev klavirja. Izmerili smo frekvenčne spektre (slika 7) večih klavirskih strun in analizirali odstopanja frekvenc alikvotnih tonov (enačba (15)) od pravilnega harmoničnega razmerja. Teoretično (enačbi (7) in (8)) in na podlagi meritev (enačba (20)) smo izračunali koeficient neharmoničnosti različnih klavirskih strun (tabela 2). Ugotovili smo, da da je neharmoničnost največja v skrajnih legah klavirja, saj imajo najkrajše strune večji koeficient neharmoničnosti od strun v sredini klavirja. Najdaljše strune imajo koeficient neharmoničnosti podoben kot strune v sredini klavirja. Preučili smo tudi vpliv dolžine in debeline strune na neharmoničnost (slika 10) in izračunali koeficiente neharmoničnosti istega tona v različnih klavirjih in ugotovili, da so manjši klavirji bolj neharmonični pri spodnjih tonih, ker imajo krajše strune za isti ton kot večji. Dobljene koeficiente smo tudi primerjali s Fletcherjevimi iz leta 1962 (tabela 3) in ugotovili dobro ujemanje koeficientov predvsem za pianino, katerega frekvenčni spekter smo izmerili. Prav tako smo analizirali uglasitev koncertnega klavirja (slika 12) in jo primerjali z Railsbackovo krivuljo iz leta 1938 (slika 3) ter ugotovili, da je današnja uglasitev klavirja zelo podobna Railsbackovi. Zaradi vpliva na analizo meritev in kot zanimivost smo predstavili še pojav navideznih alikvotnih tonov (slika 13).

Za boljšo primerjavo današnjih uglasitev klavirja z Railsbackovo krivuljo bi bilo smiselno izvesti meritve na več klavirjih, ki so jih uglasili različni ljudje, in jih povprečiti, saj je uglasitev klavirja v veliki meri odvisna od navad uglaševalca.

Možnosti nadgradnje seminarja so predvsem v smeri teoretične obravnave. Lahko bi skušali izboljšati model za teoretični izračun koeficienta neharmoničnosti z dodajanjem člena v enačbo (5), ki bi opisal vplive na struno, ki jih v tem seminarju ne upoštevamo (npr. vpliv impedance resonančne plošče). Z modelom, katerega napovedi bi bile bližje eksperimentalno dobljenim vrednostim, bi lahko bolj natančno napovedali koeficient neharmoničnosti strune še pred njeno izdelavo, kar bi omogočilo lažji razvoj klavirskih strun z manjšo neharmoničnostjo. Če bi se lotili bolj podrobne analize pojava navideznih alikvotnih tonov, bi lahko razvili algoritem za natančno predvidevanje pojavnosti teh tonov, katerih vzrok sicer poznamo, ampak zaenkrat ne znamo napovedati, kje se bodo pojavili in ali bo njihov vpliv pomemben za zven klavirja. Prav tako bi se lahko lotili razvoja elektronskega klavirja s popolnoma harmoničnimi alikvotnimi toni in njegov zven poizkusili čimbolj približati zvenu akustičnega klavirja, katerega alikvotni toni so neharmonični.

VIRI IN LITERATURA

[1] Wikipedia, *Piano*. Pridobljeno 27.6.2020 iz https://en.wikipedia.org/wiki/Piano .

[2] Yamaha, *The Structure of the Piano*. Pridobljeno 8.7.2020 iz https://www.yamaha.com/en/musical_instrument_guide/piano/mechanism/mechanism004.html .

[3] Wikipedia, *Piano acoustics*. Pridobljeno 27.6.2020 iz https://en.wikipedia.org/wiki/Piano_acoustics .

[4] Fazioli, *F278*. Pridobljeno 5.7.2020 iz https://www.fazioli.com/en/grand-pianos/f278 .

[5] Japan piano center, *Polprofesionalni pianini*. Pridobljeno 5.7.2020 iz http://www.japanpianocenter.com/najem-klavirja-pianina/ .

[6] The University of British Columbia, *Railsback curve*. Pridobljeno 10.7.2020 iz https://wiki.ubc.ca/Course:Phys341_2020/Railsback_curve .

[7] H. Järveläinen, V. Välimäki in M. Karjalainen, *Audability of the timbral effects of inharmonicity in stringed instrument tones*, Acoust. Res. Lett. Online **2**, 79 (2001).

[8] N. Giordano, *Explaining the Railsback stretch in terms of inharmonicity of piano tones and sensory dissonance*, J. Acoust. Soc. Am. **138**, 2359 (2015).

[9] O. H. Schuck in R. W. Young, *Observations on the vibrations of piano strings*, J. Acoust. Soc. Am. **15** 1 (1943).

[10] J. W. S. Rayleigh, *The Theory of Sound* (MacMillan and Co., London, 1878).

[11] Wikipedia, *Equal temperament*. Pridobljeno 8.7.2020 iz https://en.wikipedia.org/wiki/Equal_temperament .

[12] Wikipedia, *Inharmonicity*. Pridobljeno 8.7.2020 iz https://en.wikipedia.org/wiki/Inharmonicity .

[13] X. Garcia in T. Sanz-Perela, *The wave equation for stiff strings and piano tuning*, Reports@SCM **3**, 1 (2017).

[14] H. Fletcher, *Normal Vibration Frequencies of a Stiff Piano String*, J. Acoust. Soc. Am. **36**, 203 (1964).

[15] H. Conkin, uredil A. Askenfelt, *Five lectures on the acoustics of the piano, Piano design factors – their influence on tone and acoustical performance*. (Royal Swedish Academy of Music, Stockholm, 1990).

[16] Physics of Music – Notes, *Frequencies for equal tempered scale A4=442Hz*. Pridobljeno 20.7.2020 iz https://pages.mtu.edu/~suits/notefreq442.html .

[17] Fazioli, *F212*. Pridobljeno 5.7.2020 iz https://www.fazioli.com/en/grand-pianos/f212 .

[18] Steinberg, *UR22mkII*. Pridobljeno 10.7.2020 iz https://www.steinberg.net/en/products/audio_interfaces/ur_series/models/ur22mkii.html .

[19] AKG, *C414 B-ULS*. Pridobljeno 10.7.2020 iz https://www.akg.com/support/C414+B-ULS_.html .

[20] P. D. Henderson, *The Fundamentals of FFT-Based Audio Measurments in SmaartLive*. Pridobljeno 3.6.2020 iz https://www.rationalacoustics.com/files/FFT_Fundamentals.pdf .

[21] H. Järveläinen T. Verma in V. Välimäki, *Perception and Adjustment of Pitch in Inharmonic String Instrument Tones*, J. New Music Res. **31**, 311 (2002).

[22] N. Giordano, *Mechanical impedance of piano soundboard*, J. Acoust. Soc. Am. **103**, 2128 (1998).

[23] J. Dalmont in S. Maugeais, *Piano string with reduced inharmonicity*. Pridobljeno 15.7.2020 iz https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02166229v2/document .

[24] B. Bank in L. Sujbert, *Generation of longitudinal vibrations in piano strings: From physics to sound synthesis*, J. Acoust. Soc. Am. **117**, 2268 (2005).